

Estimação da Volatilidade do Retorno das Ações Brasileiras - Um Método Alternativo à Família GARCH - ¹

Modelos da família GARCH têm sido sugeridos como alternativa eficiente para a estimação da volatilidade do retorno de ativos financeiros. Entretanto, esta família assume que choques positivos e negativos no retorno dos ativos, com a mesma magnitude, exercem impacto idêntico sobre a volatilidade, enquanto a observação empírica acusa que choques negativos apresentam impacto maior que os positivos, fato usualmente referido na literatura como efeito assimetria. Neste artigo, modelos que capturam este efeito são apresentados e empregados, juntamente com modelos da família GARCH, na estimação da volatilidade do retorno de ações brasileiras. Testes de especificação e simulações com séries históricas são realizadas a fim de avaliar comparativamente estes modelos, permitindo assim inferir se o efeito assimetria é relevante no caso dos ativos brasileiros e, em caso afirmativo, avaliar se este efeito é forte o suficiente para justificar o emprego de modelos que o capturam no cálculo do VaR (*Value at Risk*).

Marcos Antonio Coutinho da Silveira
Mestre e Doutorando em Economia na PUC-Rio

Alexandre Barcinski
Mestre em Economia na PUC-Rio e Doutorando em Economia na Universidade de Chicago

Bernardo Calmon Du Pin e Almeida
Economista do Banco ICATU

Márcio Gomes Pinto Garcia
Diretor do Departamento de Economia da PUC-Rio

¹ Este trabalho foi desenvolvido no Departamento de Controle de Risco do Banco Icatu.

1. Introdução

Em artigo recente nesta revista [veja bibliografia ao final deste artigo], os autores sugerem, apropriadamente, o emprego de modelos da família GARCH como alternativa mais eficiente para a estimação da volatilidade condicional do retorno dos ativos financeiros. É inquestionável que estes modelos sejam superiores aos métodos de estimação encontrados na maioria dos pacotes de gerenciamento de risco, até porque os últimos em geral resultam de restrições paramétricas impostas sobre a família GARCH. Exemplo disto é o método do decaimento exponencial, empregado pelo popularizado *RiskMetrics* para a estimação de volatilidades, que nada mais é que o modelo IGARCH sem constante. Entretanto, a família GARCH sofre o sério inconveniente de não ser flexível o suficiente para capturar importantes propriedades encontradas nas séries de dados financeiros, como o impacto diferenciado de choques positivos e negativos, de mesma magnitude, no retorno corrente dos ativos sobre a volatilidade de retornos futuros, fato estilizado conhecido na literatura como *efeito assimetria*. É por isto que se faz necessária a reestimação da volatilidade do retorno dos ativos a partir de modelos parametricamente menos restritivos, capazes de ajustar-se mais adequadamente a base de dados existente. Dois destes modelos são analisados neste trabalho: o GJR, o qual resulta ser uma generalização direta do GARCH(1,1), e o GARCH exponencial (EGARCH). Estes modelos serão estimados e seus resultados comparados com os da família GARCH. Espera-se que as parametrizações alternativas para a volatilidade condicional, que permitem capturar o efeito assimetria, forneçam estimativas mais acuradas para esta variável, embora qualquer ganho neste sentido precise ser comparado a uma provável perda em termos de maior esforço e complexidade computacionais.

2. Modelo Teórico

Denote por r_{t+1} a taxa de variação do preço de um ativo qualquer no dia $t+1$, ou seja,

$$r_{t+1} \equiv (P_{t+1} - P_t) \div P_t, \quad (1)$$

onde P_{t+1} e P_t são os preços de fechamento do ativo em $t+1$ e t respectivamente.

Ignorando o pagamento de dividendos, a variável r_{t+1} é o retorno diário do ativo em $t+1$. Assuma que r_{t+1} possui uma distribuição de probabilidade condicionada a toda informação disponível até o dia t inclusive, cujas média e variância, denotadas por μ_t e σ_t^2 respectivamente, podem eventualmente depender deste conjunto de informação, ou seja,

$$r_{t+1} \mid t \sim \text{DIST}(\mu_t, \sigma_t^2), \quad (2)$$

onde $\mu_t \equiv E_t(r_{t+1})$, $\sigma_t^2 \equiv \text{VAR}_t(r_{t+1})$ e $\text{DIST}(\cdot, \cdot)$ é uma distribuição de probabilidade qualquer, não necessariamente normal.

A hipótese, frequentemente assumida, de que a distribuição condicional do retorno é normal, embora atrativa para fins de estimação da volatilidade, revela-se irreal, uma vez confrontada com a evidência empírica de que o excesso de achatamento e a assimetria⁽¹⁾ presentes na distribuição incondicional do retorno dos ativos financeiros são, em geral, novamente encontrados na sua distribuição condicional.

O modelo se completa com a parametrização da esperança e da variância condicionais do retorno r_{t+1} em (2) como função da informação disponível em t , a qual, atendo-se apenas ao modelo aqui examinado, consiste de todas as variáveis conhecidas até este dia inclusive: o retorno corrente r_t , a série de retornos passados $(r_1, r_2, \dots, r_{t-1})$ e a série de volatilidades dos retornos corrente e passados $(\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_{t-1}^2)$. Quanto à esperança condicional, o modelo *RiskMetrics* simplesmente sugere que essa é identicamente nula, não dependendo, portanto, da informação em t , o que, pela lei das expectativas iteradas⁽²⁾, implica que a esperança incondicional também é nula, fato que não é corroborado pelas séries históricas de retorno de muitos ativos financeiros, inclusive de ações brasileiras. Uma alternativa simples, que permite uma hipótese menos irreal, embora continue assumindo uma esperança condicional independente da informação em t , consiste em assumir que

$$\mu_t \equiv E_t(r_{t+1}) = c \quad (3)$$

para todo t , onde c é uma constante não necessariamente nula. Dado seu maior realismo, esta será a hipótese adotada neste trabalho.

Resta, enfim, selecionar um modelo paramétrico adequado à variância condicional do retorno dos ativos. De uma forma geral, todos os modelos analisados neste trabalho enquadram-se na forma

$$\sigma_t^2 = f(\varepsilon_t, \sigma_{t-1}^2, \theta), \quad (4)$$

ou seja, a variância condicional do retorno em $t+1$, dada por σ_t^2 , é uma função dos seguintes termos:

- 1) a variância condicional do retorno em t , dada por σ_{t-1}^2 ;
- 2) o choque no retorno em t , denotado por ε_t e definido como $\varepsilon_t \equiv r_t - u_{t-1}$ ⁽³⁾ para todo t ;

⁽¹⁾ Sem muito rigor, pode-se dizer que uma distribuição de probabilidade apresenta excesso de achatamento quando observações distantes da média são mais frequentes do que no caso da distribuição normal. Uma distribuição apresenta assimetria positiva (negativa) quando observações à direita (esquerda) de sua média são mais frequentes. Assimetria é inexistente no caso da distribuição normal.

⁽²⁾ Para um variável aleatória qualquer X , a lei das expectativas iteradas estabelece que

$$E[X] = E[E(X)].$$

⁽³⁾ Como $u_{t-1} \equiv E_{t-1}(r_t)$, ε_t é propriamente interpretado como a parte do retorno r_t não antecipado em $t-1$.

3) o vetor de parâmetros θ .

Segue abaixo uma sucinta descrição dos modelos analisados, bem como de suas principais propriedades.

Parametrizações Alternativas da Variância Condicional:

1. *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* - GARCH (p,q)

$$\sigma_t^2 = A + B_1 \varepsilon_t^2 + B_2 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + B_p \varepsilon_{t-p+1}^2 + C_1 \sigma_{t-1}^2 + C_2 \sigma_{t-2}^2 + \dots + C_q \sigma_{t-q}^2 ; \quad (5)$$

$$\theta \equiv (A , B_1 , B_2 , \dots , B_p , C_1 , C_2 , \dots , C_q).$$

Ao contrário dos modelos da classe ARCH, os da classe GARCH permitem capturar movimentos persistentes na volatilidade dos ativos, provocados por choques no retorno, sem ter de estimar um grande número de parâmetros⁽⁴⁾. Dado o limitado tamanho das séries de retorno dos ativos, esta propriedade revela-se crucial para garantir que os parâmetros sejam estimados de forma razoavelmente precisa. Condição suficiente para que a variância condicional seja sempre positiva é que A seja positivo e os outros parâmetros sejam não negativos. O modelo GARCH mais usado na literatura é o GARCH(1,1), o qual assume a forma

$$\sigma_t^2 = A_0 + A_1 \varepsilon_t^2 + A_2 \sigma_{t-1}^2, \quad (6)$$

que pode ser reescrita como

$$\sigma_t^2 = A_0 + A_1 (\varepsilon_t^2 - \sigma_{t-1}^2) + (A_1 + A_2) \sigma_{t-1}^2. \quad (7)$$

Segue de (2) e da definição de ε_t que a expressão $(\varepsilon_t^2 - \sigma_{t-1}^2)$ tem distribuição condicional (à informação em $t-1$) com média zero. Este resultado, por sua vez, implica que a esperança condicional de σ_t^2 é dada por

$$E_{t-1}(\sigma_t^2) = A_0 + (A_1 + A_2) \sigma_{t-1}^2. \quad (8)$$

Logo, com base em (7) e (8), o termo do meio em (7) pode ser interpretado como um choque em σ_t^2 – com relação à esperança desta variável condicionada à informação em $t-1$, expressa em (8) – provocado por um choque em ε_t . O coeficiente A_1 mede a extensão em que um choque no retorno hoje afeta a volatilidade do retorno do dia seguinte, enquanto a soma $A_1 + A_2$ mede a taxa a qual o impacto de um choque no retorno hoje se propaga ao longo do tempo

⁽⁴⁾ O modelo ARCH (p) assume a forma

$$\sigma_t^2 = A + B_1 \varepsilon_t^2 + B_2 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + B_p \varepsilon_{t-p+1}^2.$$

Ao contrário do modelo GARCH, no qual choques no retorno propagam-se indefinidamente no futuro, no modelo ARCH(p) choques no retorno defasados em mais de p períodos não tem qualquer impacto sobre a volatilidade condicional do retorno presente. O modelo GARCH pode então ser visto como um ARCH(∞).

sobre a volatilidade de retornos futuros. Um alto valor para esta soma significa que choques no retorno têm impacto fortemente persistente sobre a volatilidade, ou seja, um choque no retorno hoje deverá afetar significativamente a volatilidade do retorno em um ponto razoavelmente distante do futuro. Esta propriedade é melhor ilustrada quando a esperança da volatilidade do retorno em um dia futuro, condicionadas à informação disponível em t , é derivada a partir de (7) e (8), obtendo-se para i ($i=1,2,3,\dots$) períodos à frente a expressão

$$E_t(\sigma_{t+i}^2) = (A_1+A_2)^i (\sigma_t^2 - B) + B, \quad (9)$$

onde a constante B , dada por

$$B \equiv A_0 \div (1 - A_1 - A_2) \quad (10)$$

é a esperança incondicional de σ_{t+i}^2 no caso particular em que $A_1+A_2 < 1$. Quando essa desigualdade é satisfeita, segue de (9) que a esperança da volatilidade no dia $t+i$, condicionada à informação disponível em t , converge para sua esperança incondicional, a uma taxa A_1+A_2 , à medida que esse dia situa-se mais distante no futuro, ou seja, quando i aumenta.

Duas restrições ao modelo GARCH(1,1) são de especial importância para este trabalho uma vez que estão associadas ao método de estimação de volatilidade usado no modelo *RiskMetrics*.

1.A. IGARCH com constante

$$\sigma_t^2 = A_0 + A_1 \varepsilon_t^2 + (1-A_1) \sigma_{t-1}^2; \theta \equiv (A_0, A_1). \quad (11)$$

Aqui, os coeficientes A_1 e A_2 em (6) somam 1 e a constante A_0 pode assumir valor diferente de zero. Para efeito de previsão da volatilidade de retornos futuros, isto implica que

$$E_t(\sigma_{t+i}^2) = \sigma_t^2 + i A_0, \quad (12)$$

onde $i=1,2,3,\dots$

1.B. IGARCH sem constante (*RiskMetrics*)

$$\sigma_t^2 = A_1 \varepsilon_t^2 + (1-A_1) \sigma_{t-1}^2; \theta \equiv A_1. \quad (13)$$

Neste modelo, além dos coeficientes A_1 e A_2 em (6) somarem 1, a constante A_0 é nula. Este modelo é equivalente ao método do decaimento exponencial empregado pelo *RiskMetrics* na estimação da volatilidade.

2. GJR⁽⁵⁾

$$\sigma_t^2 = A_0 + A_1 \varepsilon_t^2 + A_2 1(\varepsilon_t < 0) \varepsilon_t^2 + A_3 \sigma_{t-1}^2 ; \quad \theta \equiv (A_0, A_1, A_2, A_3), \quad (14)$$

onde $1(\varepsilon_t < 0)$ é a função indicadora, que assume valor 1 quando $\varepsilon_t < 0$ e valor 0 quando $\varepsilon_t \geq 0$. Ao contrário dos anteriores, esse modelo permite que choques no retorno com sinais opostos apresentem impacto diferenciado – em termos de magnitude (valor absoluto) e direção (positiva ou negativa) – sobre a volatilidade. Quando presente e relevante, esta assimetria é refletida no modelo GJR por um coeficiente A_2 significativamente diferente de zero. Esta propriedade do modelo o permite capturar importante fato estilizado, documentado na literatura como "*leverage effect*", ou efeito assimetria, segundo o qual a magnitude (valor absoluto) do impacto de um choque negativo no retorno do dia t sobre a volatilidade do retorno do dia $t+1$ é maior que a de um choque positivo com a mesma magnitude, resultando, assim, num coeficiente A_2 significativamente positivo. Como no modelo GARCH(1,1), persistência continua sendo capturada pelo coeficiente da volatilidade do período anterior. É importante observar que quando A_2 é nulo o modelo GJR se transforma num GARCH(1,1). Assim, este último nada mais é que um caso particular do modelo GJR e, portanto, nada se perde, em termos de estimação, com o uso do modelo GJR no lugar do GARCH. Novamente, restrições sobre o vetor de parâmetros θ são necessários para assegurar o sinal positivo da variância condicional: $A_0 > 0$;

$A_1, A_3 \geq 0$; $A_1 + A_2 \geq 0$.

3. EGARCH (*Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*)

$$\log \sigma_t^2 = A_0 + A_1 (|\varepsilon_t \div \sigma_{t-1}| - (2/\pi)^{1/2}) - A_2 (\varepsilon_t \div \sigma_{t-1}) + A_3 \log \sigma_{t-1}^2 ; \quad (15)$$

$$\theta \equiv (A_0, A_1, A_2, A_3),$$

onde $E[|\varepsilon_t \div \sigma_{t-1}|] = (2/\pi)^{1/2}$. Como no modelo anterior, efeito assimetria e persistência são novamente capturados pelo parâmetros denotados por A_2 e A_3 respectivamente. Uma vantagem desse modelo diante do anterior é que o uso da função logarítmica assegura a positividade da volatilidade, sem a necessidade de qualquer restrição sobre o vetor de parâmetros θ . Ao contrário do que ocorre com o GJR, o GARCH(1,1) não pode mais ser derivado como um caso particular do EGARCH por meio de restrições sobre os parâmetros deste modelo. Dessa forma, mesmo quando o efeito assimetria é significativo, não é possível concluir, com base apenas neste resultado, que o EGARCH seja mais eficiente na estimação da volatilidade, uma vez que sua forma paramétrica pode prover um ajustamento aos dados inferior ao da família GARCH. Mais detalhes sobre este modelo são encontrados em Nelson (1991).

⁽⁵⁾ O nome do modelo deve-se ao fato de ter sido inicialmente proposto em Glosten, Lawrence R., Ravi Jagannathan and David Rankle. 1993. "Relationship between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks". *Journal of Finance*. Também é conhecido na literatura como *Threshold Model*.

3. Estimação

O modelo é estimado pelo método de máxima verossimilhança, assumindo que a distribuição condicional do retorno é normal. Como foi argumentado acima, embora tal hipótese seja irrealista, Weiss (1984,1986) demonstra que, se a média e a variância condicionais são corretamente especificadas no modelo, este método provê estimadores consistentes e assintoticamente normalmente distribuídos, embora não assintoticamente eficientes, para o vetor de parâmetros θ em (4). Costuma-se chamá-los na literatura de estimadores de *quasi*-máxima verossimilhança, uma vez que não são derivados a partir da maximização da verdadeira função de verossimilhança. Assim sendo, em grandes amostras, a estimação consistente da volatilidade do retorno não requer a correta especificação da verdadeira distribuição condicional do retorno, mas apenas de seus dois primeiros momentos. Logo, analistas de risco devem concentrar seus esforços na seleção de um modelo paramétrico satisfatório para a média e variância condicionais. Além disso, a normalidade da distribuição condicional do retorno é bastante conveniente para fins de estimação, pois muitos programas estatísticos, como RATS e TSP, possuem rotinas prontas para a maximização da função de verossimilhança derivada a partir desta hipótese. Maiores detalhes sobre o procedimento de estimação podem ser encontrados em Hamilton (1994).

Uma vez estimados os parâmetros do modelo, a série estimada de volatilidade condicional para o período amostral é obtida recursivamente, por meio da expressão

$$\sigma_{t_e}^2 = f(\varepsilon_{t_e}, \sigma_{t-1_e}^2, \theta_{qmv}), \quad t = 1, 2, 3, \dots, T \quad (16)$$

onde⁽⁶⁾

- 1) $\sigma_{t_e}^2$ é a estimativa da volatilidade do retorno em $t+1$;
- 2) ε_{t_e} é a estimativa do choque no retorno em t , definido como $\varepsilon_{t_e} \equiv r_t - c_e$, onde c_e é a estimativa da média condicional c em (3);
- 3) θ_{qmv} é a estimativa de *quasi*-máxima verossimilhança do vetor de parâmetros θ .

4. Base de Dados

O modelo deste trabalho é estimado com base nas séries históricas de retorno diário de seis ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo: Eletrobrás ON (ELE3), Eletrobrás PN (ELE6), Petrobrás PN (PET4), Telebrás ON (TEL3), Telebrás PN (TEL4), Vale do Rio Doce PN (VAL4). Estas séries são obtidas a partir do preço de fechamento destes ativos, como definido em (1). Todas as séries de retorno consistem de 704 observações, abrangendo todos os dias úteis no período de 4/1/1994 a 8/11/1996.

⁽⁶⁾ Um valor adequado precisa ser arbitrado para σ_0^2 a fim de que $\sigma_{t_e}^2$ possa ser obtido.

5. Resultados

Como apresentado na seção 1, o modelo teórico deste trabalho é descrito pelas hipóteses (1), (2), (3), (4), e por uma das cinco parametrizações sugeridas acima para a variância condicional. Logo, existem ao todo cinco modelos teóricos alternativos, cada um dos quais será ajustado à série de retorno de seis ações (*blue chips*) negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo. Isto significa basicamente encontrar estimativas de *quasi*-máxima verossimilhança para o vetor de parâmetros θ ⁽⁷⁾ em (4) para cada ação em cada um dos cinco modelos alternativos. Estas estimativas são apresentadas nas tabelas (1)-(5), acompanhadas das respectivas estatísticas t e valores p⁽⁸⁾.

Alguns importantes resultados qualitativos ficam logo evidentes a partir de uma análise das tabelas. Em primeiro lugar, com exceção de PET4, no caso das outras ações, o coeficiente que captura assimetria nos modelos GJR e EGARCH, denotado por A2, é positivo e em geral significativamente diferente de zero ao nível de 5%. Em relação a ELE6 e TEL4, este coeficiente é significativo mesmo a níveis abaixo de 1%. Este resultado significa que o impacto de um choque negativo no retorno do dia t sobre a volatilidade do retorno do dia t+1 é mais forte que o de um choque positivo com o mesmo valor absoluto, fato comumente ressaltado em estudos empíricos com séries de retornos de ações de outros países. Quanto à ação da Petrobrás (PET4), o efeito assimetria não é significativo: a hipótese de que o coeficiente A2 é zero não pode ser rejeitada nem ao nível de 10% tanto no GJR como no EGARCH. É interessante notar que ações de uma mesma empresa apresentam resultado igual quanto à existência ou não de assimetria, confirmando assim sua robusteza.

Em segundo lugar, no caso das ações para as quais o efeito assimetria é significativo, é natural que este seja quantitativamente muito mais evidente e expressivo para choques no retorno de elevada magnitude. Choques de magnitude muito pequena com sinais diferentes não deverão ter impacto consideravelmente distinto sobre a volatilidade, o mesmo já não acontecendo no caso de choques de grande magnitude, quando então modelos que permitem capturar assimetria, como o GJR e o EGARCH, proverão estimativas de volatilidade muito mais acuradas que os modelos sem esta propriedade, como o GARCH(1,1) e o IGARCH. Este resultado fica bem ilustrado nas figuras (1) e (2), as quais são explicadas a seguir. Em ambas as figuras, a linha contínua em preto é o gráfico da série de retorno diário da ação TEL 4 no período entre 03 / 07 / 1995 e 08 / 11 / 1996. Para se compreender os outros gráficos nas duas figuras, suponha inicialmente que a distribuição condicional do retorno diário de TEL 4 seja normalmente

⁽⁷⁾ O parâmetro c em (3) é estimado juntamente com θ por *quasi*-máxima verossimilhança.

⁽⁸⁾ Este é definido como a probabilidade que a estatística de teste excederá seu valor realizado (computado como função dos dados) se a hipótese nula é verdadeira. Em outras palavras, é o nível marginal de significância do teste, ou seja, o menor nível de significância sob o qual a hipótese nula será rejeitada, dada o valor assumido pela estatística de teste. Desta forma, arbitrado um nível de significância α qualquer, como por exemplo (0.01) 1% ou (0.05) 5%, a hipótese nula será rejeitada a este nível se $p < \alpha$.

distribuída com média igual à estimativa do parâmetro c em (3)⁽⁹⁾, denotada por c_e , e desvio-padrão estimado com base em um dos cinco modelos paramétricos apresentados na seção 1 do trabalho, ou seja,

$$r_{t+1} \mid t \sim N(c_e, \sigma_{t_e}^2), \quad (17)$$

onde o subscrito e significa que se trata de parâmetro estimado. Assumindo (17), os limites superior e inferior de um intervalo de confiança de 90% para r_{t+1} , denotados, nessa ordem, por I_t^S e I_t^I , são dados, respectivamente, por $c_e + 1.65 \sigma_{t_e}$ e $c_e - 1.65 \sigma_{t_e}$. Consequentemente, a probabilidade de r_{t+1} – o retorno de TEL4 no dia $t+1$ – ocorrer entre estes dois limites é 90%. Nas figuras (1) e (2), as linhas contínuas acima e abaixo do eixo horizontal são, respectivamente, as séries de I_t^S e I_t^I para o período compreendido entre 03 / 07 / 1995 e 08 / 11 / 1996, em que σ_{t_e} é o desvio-padrão de r_{t+1} estimado através do IGARCH sem constante (*RiskMetrics*). Por sua vez, as linhas tracejadas acima e abaixo do eixo horizontal são, respectivamente, as séries de I_t^S e I_t^I para o período compreendido entre 03 / 07 / 1995 e 08 / 11 / 1996, em que σ_{t_e} é o desvio-padrão de r_{t+1} estimado através do GJR no gráfico da figura (1) e através do EGARCH no gráfico da figura (2). Consequentemente, a figura (1) permite comparar duas séries de intervalos de confiança de 90% para o retorno diário de TEL 4, estimados para o período amostral estabelecido acima: uma em que a volatilidade é parametrizada conforme o modelo *RiskMetrics* e a outra conforme o modelo alternativo GJR. O mesmo exercício é efetuado na figura (2), com a única diferença de que o modelo alternativo é o EGARCH. Em cada uma das figuras fica evidente um dos resultados que se pretende demonstrar neste trabalho: as duas séries de intervalos de confiança – uma estimada com base no *RiskMetrics* e a outra com base num modelo alternativo para a volatilidade – tendem a se afastar nos períodos marcados por choques no retorno de elevada magnitude, acontecendo exatamente o inverso nos períodos marcados por choques de pequena magnitude.

Em terceiro lugar, os coeficientes que capturam o grau de persistência, ao longo do tempo, de um choque no retorno sobre a volatilidade, dados por (1-A1) no IGARCH (com e sem constante), A2 no GARCH e A3 no GJR e no EGARCH, são positivos e significativos mesmo a níveis bem abaixo de 1%. Este resultado vale para todas as ações em todas as parametrizações da variância condicional. Desta forma, a hipótese de ausência de persistência no impacto de choques no retorno sobre a volatilidade pode ser fortemente rejeitada no caso das principais ações negociadas na Bovespa. Além de estatisticamente significativos, os coeficientes de persistência são bastante elevados (acima de 80% em qualquer caso), sugerindo que choques no retorno tendem a se propagar com força no futuro⁽¹⁰⁾.

⁽⁹⁾ Ver nota de rodapé (7)

⁽¹⁰⁾ Nota-se ainda que em todos os casos o coeficiente de persistência no modelo EGARCH é maior que o do modelo GJR. Este resultado decorre meramente da forma funcional não linear assumida pelo EGARCH, ao contrário dos demais modelos.

Em quarto lugar, testes são realizados para averiguar o desempenho relativo dos modelos sob a hipótese de normalidade da distribuição condicional do retorno. Com este fim, as duas últimas linhas em cada uma das cinco tabelas do trabalho apresentam as estatísticas TR (taxa de rejeição) e TRP (taxa de rejeição positiva), calculadas a partir da amostra de retornos diários para todos os dias úteis compreendidos entre 4/1/1994 a 8/11/1996, as quais servem de base para um teste de *stress* para o respectivo modelo de volatilidade analisado na tabela. Este teste permite dizer, para cada ação, qual o modelo mais apropriado para a variância de seu retorno diário, *se* este é normalmente distribuído como em (17). A estatística TR é a proporção de dias úteis no período amostral considerado em que r_{t+1} (a observação do retorno no dia útil $t+1$) situa-se fora do intervalo $[\Gamma_t^S, \Gamma_t^I]$ (o intervalo de confiança de 90% relativo a r_{t+1} , o qual é derivado a partir de (17) e cujos limites superior e inferior são definidos acima nesta seção). A estatística TRP é a proporção de dias úteis no período amostral considerado em que r_{t+1} é maior que Γ_t^S e portanto está fora do intervalo $[\Gamma_t^S, \Gamma_t^I]$. Quando se assume que a hipótese de normalidade em (17) é verdadeira, um modelo alternativo para a volatilidade é considerado mais apropriado o mais próximo os valores de TR e TRP estão próximos de 10% e 5%, respectivamente. O resultado referente à TRP segue obviamente da propriedade de assimetria da distribuição normal.

O teste acima baseia-se, portanto, numa simulação histórica em que uma série de retornos diários observados no passado é usada na estimação da série de volatilidades e de intervalos de confiança desses mesmos retornos, possibilitando assim avaliar comparativamente o grau de ajustamento aos dados entre modelos paramétricos alternativos para a volatilidade. Como se infere pelos resultados da tabela, o modelo IGARCH sem constante (*RiskMetrics*) seria a melhor alternativa de parametrização da volatilidade *se a hipótese de normalidade condicional do retorno fosse verdadeira*: no caso de todas as ações, os valores de TR e TRP para este modelo são, em geral, levemente mais próximos a 10% e 5% que os dos outros modelos. A ação TEL 4, por exemplo, apresenta TR e TRP iguais a 9.67% e 5.26%, enquanto todos os outros modelos apresentam TR e TRP inferiores a 8.7% e 4.5%. No entanto, como a evidência empírica é fortemente contrária a hipótese de normalidade⁽¹¹⁾, não se pode concluir deste resultado que este modelo constitua a melhor alternativa no caso mais geral de uma distribuição condicional do retorno diferente da normal.

Finalizando os resultados deste trabalho, reveste-se de fundamental importância precisar, em termos quantitativos, a contribuição dos métodos alternativos de estimação de volatilidade aqui examinados para a atividade de gerenciamento de risco. Isto é feito através de um exemplo teórico que se aproxima bastante da rotina empregada por gerentes de risco em seu esforço de estimar diariamente a perda máxima esperada da carteira das instituições financeiras. O exercício consiste em simular o comportamento ao longo do tempo de uma carteira teórica composta pelas três ações mais negociadas na BOVESPA no segundo semestre de 1996: TEL 4, ELE 6 e PET 4. Especificamente, um investimento inicial de R\$ 1.000.000,00 é efetuado no

⁽¹¹⁾ Os autores dispõem de resultados, não apresentados neste trabalho, que confirmam esta afirmação para o caso das ações aqui examinadas.

dia 10/06/1996 nesta carteira, com participação⁽¹²⁾, em valor, de 77.32% em TEL 4, 12.54% em PET4 e 10.14% em ELE6, procedendo-se a um acompanhamento do valor desta carteira e de sua composição até o dia 08/11/1996. Como, por hipótese, a composição física da carteira (número de ações de cada empresa) permanece inalterada ao longo de todo período considerado, o valor total da carteira, bem como sua composição financeira (a participação de cada ação neste valor), varia diariamente de acordo com a rentabilidade das três ações que a compõem. Com base na composição financeira para um dia útil t qualquer, um intervalo de confiança de 90% – sob a hipótese de normalidade para o retorno das ações individuais – pode ser calculado para o valor da carteira no dia útil imediatamente subsequente. A diferença entre o valor da carteira no dia t e o limite inferior deste intervalo é comumente conhecida como *Value at Risk* (VaR), o qual estabelece a perda máxima esperada, no horizonte de um dia, para o investimento, realizado no dia t , de valor igual ao da carteira neste mesmo dia.

Uma avaliação preliminar dos métodos alternativos de estimação da volatilidade, aqui apresentados, baseia-se na construção, para o período acima considerado, das séries de diferença entre o VaR em que a volatilidade do retorno dos ativos individuais é estimada com base no IGARCH sem constante (*RiskMetrics*) e o VaR em que esta volatilidade é estimada com base em um dos quatro modelos alternativos sugeridos. As figuras (3)-(6) apresentam os gráficos destas séries (linha contínua), bem como os gráficos das séries daquela diferença como proporção do VaR relativo ao RiskMetrics (linha tracejada). As médias das séries de diferença são, respectivamente, R\$ 3.391.04, R\$ 3.533,40, R\$ 4.049.04 e R\$ 4.674,29, ao passo que as médias das séries de diferença como porcentagem do VaR relativo ao RiskMetrics são, respectivamente, 14.70%, 15.31%, 17.61% e 20.59%. Nenhuma das quatro séries de diferença apresenta valor superior a R\$ 11.000,00, enquanto as séries da diferença como proporção do VaR relativo ao RiskMetrics superam muito frequentemente o nível razoavelmente elevado de 25%, chegando mesmo a 50% em alguns dias úteis. Desta forma, embora a substituição do modelo RiskMetrics (IGARCH sem constante) por um alternativo possa resultar numa variação percentual bastante significativa do VaR, em termos absolutos esta diferença pode ser irrisória frente à ordem de grandeza do valor da carteira, aproximadamente em torno de R\$ 1.000,000,00.

No que tange aos objetivos deste trabalho, muito mais informativas são as figuras (7)-(10), cada qual apresentando os gráficos das séries de VaR, nas linhas superiores (as duas linhas acima do eixo horizontal), e de seu valor simétrico (o ganho máximo esperado), nas linhas inferiores, quando a volatilidade é estimada com o RiskMetrics e com um modelo alternativo, bem como o gráfico da série de perda efetiva da carteira⁽¹³⁾. Como se observa nos gráficos, a perda efetiva tende em geral a superar o VaR associado ao RiskMetrics nos mesmos dias em que assim o faz em relação ao modelo alternativo. Assim sendo, no que diz respeito à atividade de gerenciamento de risco, pode-se afirmar que o método do decaimento exponencial sugerido pela RiskMetrics apresenta desempenho satisfatório perante os modelos alternativos aqui

⁽¹²⁾ Esta participação baseia-se na carteira teórica do IBOVESPA de janeiro de 1997.

⁽¹³⁾ Logicamente, valores negativos desta série indicam ganho da carteira.

sugeridos, devendo, assim, qualquer discussão quanto a sua eventual substituição por outro método levar fortemente em conta critérios relativos à comodidade e rapidez computacionais.

6. Conclusão

Estudos empíricos, com base em séries históricas de retorno de ações de outros países, chamam a atenção para o fato de que um choque no retorno do dia t (a diferença entre o retorno do dia t e seu valor esperado no dia $t-1$) tem um impacto assimétrico sobre a variância do retorno do dia $t+1$: choques negativos têm um impacto positivo sobre a volatilidade maior que o de choques positivos de mesma magnitude (valor absoluto). Esse resultado, conhecido como efeito assimetria, não pode ser capturado pela família GARCH, pois esta consiste numa parametrização da volatilidade que impõe a restrição de que choques positivos e negativos de mesma magnitude exercem o mesmo impacto sobre aquela variável. É devido a esta limitação da família GARCH que se faz necessário testar modelos paramétricos alternativos para a volatilidade das ações que sejam flexíveis o suficiente para capturar o efeito assimetria, ou seja, modelos em que choques positivos e negativos de mesmo valor absoluto possam ter impacto diferenciado sobre a volatilidade, inclusive com sinais opostos. Dois modelos com esta característica, conhecidos como GJR e EGARCH, são examinados neste trabalho e comparados com três modelos da família GARCH: o IGARCH sem constante e com constante e o GARCH(1,1).

A partir dos resultados deste trabalho, é possível afirmar que a maioria dos papéis aqui analisados (ações brasileiras com elevado volume de negócios em bolsa) apresentam efeito assimetria fortemente significativo, o que, a princípio sugere a substituição de modelos da família GARCH – inclusive o método do decaimento exponencial usado pelo *RiskMetrics* (IGARCH sem constante) – pelo GJR ou EGARCH nos modelos de gerenciamento de risco. Em especial, este efeito será bastante expressivo no caso de choques no retorno de grande magnitude, quando então as estimativas de volatilidade obtidas com os modelos que capturam assimetria (GJR e EGARCH) diferirão mais expressivamente das estimativas obtidas com os modelos que não capturam assimetria (IGARCH e GARCH).

A simulação com dados históricos do comportamento de uma carteira teórica de ações da BOVESPA ao longo de um período especificado mostra claramente que as perdas efetivas desta carteira, em geral, superam o VaR (a perda máxima esperada) relativo ao *RiskMetrics* – em que a volatilidade do retorno dos ativos é estimada por meio do método do decaimento exponencial (IGARCH sem constante) – nos mesmo dias úteis em que assim o faz em relação ao VaR alternativo – em que essa mesma volatilidade é estimada por intermédio de um dos métodos alternativos sugeridos no trabalho. Logicamente, este resultado é um argumento a favor de se continuar usando o método do decaimento exponencial na estimação da volatilidade dos ativos financeiros. Além disso, à medida que os procedimentos em voga de análise de risco assumem a hipótese de normalidade condicional do retorno dos ativos, apesar de refutada pela evidência empírica, um segundo argumento a favor do método do *RiskMetrics* pode ser

levantado: testes de *stress* apontam para o melhor desempenho do IGARCH sem constante frente aos outros modelos aqui sugeridos *se* aquela hipótese é assumida verdadeira, sugerindo, assim, que este modelo é mais compatível com a hipótese de normalidade condicional para o retorno dos ativos. Tais resultados desencorajam o uso do GJR e do EGARCH no trabalho de gerenciamento de risco das instituições financeiras, em substituição ao método do decaimento exponencial, que possui a vantagem de ser computacionalmente bastante rápido⁽¹⁴⁾. Entretanto, seria precipitado concluir que os ganhos auferidos com a estimação mais precisa da volatilidade do retorno dos ativos com o uso daqueles dois modelos não sejam suficientemente expressivos face à comodidade computacional oferecida pelo método do decaimento exponencial, uma vez que para algumas atividades importantes, como a precificação de opções, reduzidas melhorias na estimação das volatilidades são grande valor.

7. Bibliografia

Bollerslev, Tim. 1986. "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity". *Journal of Econometrics* 31: 307-327.

Duarte Jr., Antonio Marcos, Tatiana B. B. Heil e Marcelo de A. Pinheiro. 1996. "Previsão da Volatilidade de Ativos e Índices Brasileiros". *Resenha BMF (Publicação Mensal da Bolsa de Mercadorias e Futuros)* n.112 : 15-27.

Engle, Robert F. 1982. "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation". *Econometrica* 50:987-1007.

Engle, Robert F. e Victor K. Ng. 1993. "Measuring and Testing the Impact of News on Volatility". *Journal of Finance* 48:1749-1778.

Glosten, Lawrence R., Ravi Jagannathan e David Rankle. 1993. "Relationship between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks". *Journal of Finance* 48: 1779-1881.

Hamilton, James D. 1994. "Time Series Analysis": capítulo 21. Princeton University Press.

Nelson, Daniel. 1991. " Conditional Heteroskedastic in Asset Returns: A New Approach". *Econometrics* 59: 347-370.

⁽¹⁴⁾ É preciso ressaltar, no entanto, que esta vantagem relativa do RiskMetrics vem sendo gradativamente reduzida à medida que o desenvolvimento de *softwares* estatísticos mais sofisticados incorpora muitos dos modelos alternativos, simplificando assim sua utilização.

Weiss, Andrew A. 1984. "ARMA Models with ARCH Errors". *Journal of Time Series Analysis* 5:129-143.

Weiss, Andrew A. 1986. "Asymptotic Theory for ARCH Models". *Econometric Theory* 2:107-31.

TABELA 1						
MODELO IGARCH SEM CONSTANTE - BOLSA DE VALORES DE SÃO PAULO						
PERÍODO AMOSTRAL : 04-01-94 A 08-11-96						
	ELE3	ELE6	PET4	TEL3	TEL4	VAL4
A1	0.0840865	0.0776597	0.0717012	0.0739822	0.1004550	0.0739706
t	8.5274863	10.3444639	6.9814107	8.2892456	11.1342634	7.8422601
p	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
TR	0.1066856	0.1066856	0.1009957	0.1024182	0.0967283	0.1024182
TRP	0.0568990	0.0512091	0.0483642	0.0440967	0.0526316	0.0497866

TABELA 2						
MODELO IGARCH COM CONSTANTE - BOLSA DE VALORES DE SÃO PAULO						
PERÍODO AMOSTRAL : 04-01-94 A 08-11-96						
	ELE3	ELE6	PET4	TEL3	TEL4	VAL4
A0	0.0000118	0.0000116	0.0000048	0.0000124	0.0000210	0.0000058
t	2.2859668	2.4760622	1.4674458	2.3343973	3.1490731	1.7040106
p	0.0222562	0.0132840	0.1422548	0.0195749	0.0016379	0.0883791
A1	0.1084196	0.1017956	0.0866627	0.1191722	0.1704954	0.0984340
t	6.6197317	7.0856391	5.8319972	5.2192952	6.4680457	5.4727785
p	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000002	0.0000000	0.0000000
TR	0.0881935	0.0825036	0.0938834	0.0867710	0.0810811	0.0881935
TRP	0.0440967	0.0384068	0.0426743	0.0341394	0.0426743	0.0412518

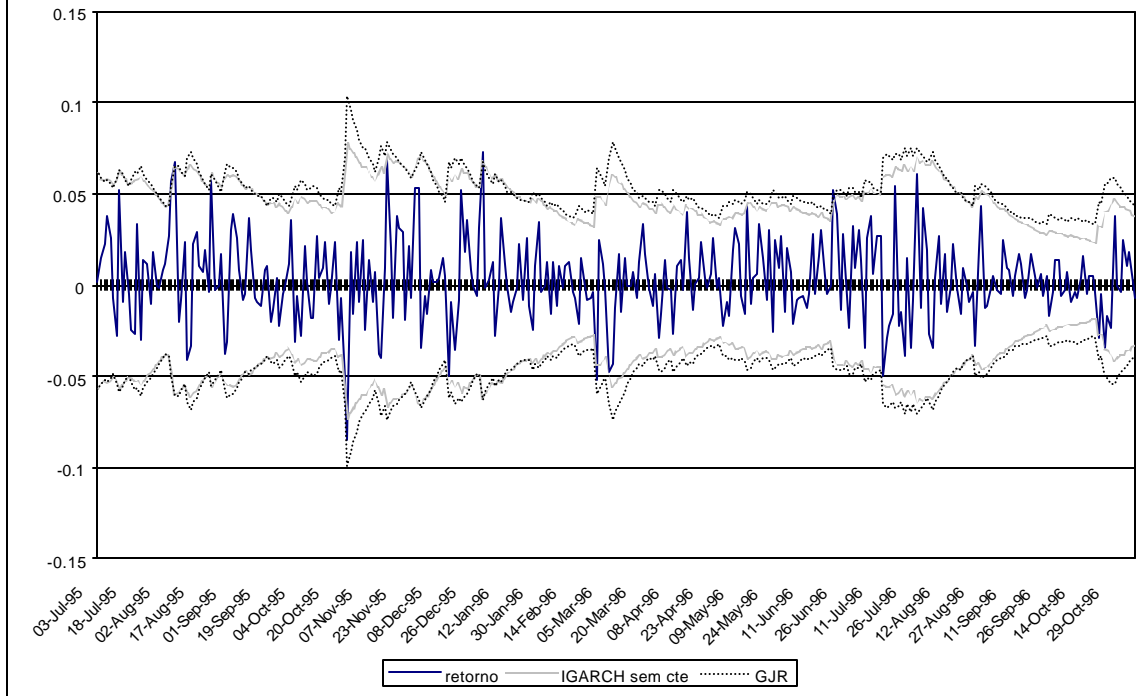
TABELA 3						
MODELO GARCH - BOLSA DE VALORES DE SÃO PAULO						
PERÍODO AMOSTRAL : 04-01-94 A 08-11-96						
	ELE3	ELE6	PET4	TEL3	TEL4	VAL4
A0	0.0000166	0.0000168	0.0000057	0.0000160	0.0000238	0.0000077
t	2.3784429	2.7044697	1.4174168	2.1837805	2.6418451	1.5680434
p	0.0173859	0.0068414	0.1563611	0.0289784	0.0082456	0.1168710
A1	0.0990010	0.0923571	0.0821197	0.1083448	0.1623093	0.0936934
t	5.7447471	6.1011774	5.3457723	4.8684141	6.4449792	5.2539045
p	0.0000000	0.0000000	0.0000001	0.0000011	0.0000000	0.0000001
A2	0.8912809	0.8975051	0.9147629	0.8825858	0.8295909	0.9010152
t	54.4937642	62.5873489	62.4586060	38.6947329	30.0098098	48.8913524
p	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
TR	0.0981508	0.0881935	0.0967283	0.0896159	0.0825036	0.0881935
TRP	0.0483642	0.0426743	0.0440967	0.0355619	0.0426743	0.0398293

TABELA 4						
MODELO GJR - BOLSA DE VALORES DE SÃO PAULO						
PERÍODO AMOSTRAL : 04-01-94 a 08-11-96						
	ELE3	ELE6	PET4	TEL3	TEL4	VAL4
A0	0.0000127	0.0000141	0.0000055	0.0000143	0.0000212	0.0000048

t	1.7166970	2.3027979	1.2729953	1.9009652	2.1685264	1.0022796
p	0.0860345	0.0212902	0.2030197	0.0573066	0.0301187	0.3162086
A1	0.0730503	0.0605920	0.0791305	0.0822786	0.1058304	0.0688603
t	3.7866330	3.1423283	4.0978390	3.1688045	3.3007962	3.5898073
p	0.0001527	0.0016761	0.0000417	0.0015307	0.0009641	0.0003309
A2	0.0524141	0.0589993	0.0043838	0.0616526	0.0947253	0.0447162
t	2.2961990	2.6391328	0.2026470	2.1471358	3.4377785	2.1190252
p	0.0216645	0.0083118	0.8394110	0.0317825	0.0005865	0.0340883
A3	0.8943741	0.9021542	0.9156497	0.8806696	0.8388988	0.9064626
t	51.1269642	54.8870688	60.9545787	35.7027797	26.3765129	49.1020689
p	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
TR	0.0953058	0.0910384	0.0967283	0.0910384	0.0867710	0.0910384
TRP	0.0440967	0.0412518	0.0440967	0.0384068	0.0426743	0.0426743

TABELA 5						
MODELO EGARCH - BOLSA DE VALORES DE SÃO PAULO						
PERÍODO AMOSTRAL : 04-01-94 A 08-11-96						
	ELE3	ELE6	PET4	TEL3	TEL4	VAL4
A0	-0.0572039	-0.0565961	-0.0569961	-0.1026859	-0.1262203	-0.0594617
t	1.6309345	1.8368896	1.5802182	1.9984671	1.9746908	1.1957856
p	0.1029041	0.0662262	0.1140569	0.0456660	0.0483033	0.2317802
A1	0.1874937	0.1737278	0.1874632	0.2088932	0.2540365	0.1873901
t	6.1677348	5.9735651	5.6026208	5.1238151	5.7236900	5.3498195
p	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000003	0.0000000	0.0000001
A2	0.0286753	0.0287954	-0.0036095	0.0438945	0.0503297	0.0180706
t	2.1121394	2.0770437	0.2404063	2.4885507	3.5053805	1.1865204
p	0.0346745	0.0377975	0.8100153	0.0128265	0.0004560	0.2354168
A3	0.9916730	0.9917229	0.9917124	0.9850851	0.9817477	0.9916624
t	187.0567232	210.8914314	184.1329236	131.0557053	106.0388918	137.8541312
p	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
TR	0.0924609	0.0938834	0.0953058	0.0967283	0.0839260	0.0953058
TRP	0.0440967	0.0398293	0.0426743	0.0426743	0.0440967	0.0440967

**Figura 1: Retorno de TEL4 e Intervalo de Confiança (90%) para o Retorno de TEL4
IGARCH sem constante (RiskMetrics) e GJR**



**Figura 2: Retorno de TEL4 e Intervalo de Confiança (90%) para o Retorno de TEL4
IGARCH sem constante (RiskMetrics) e EGARCH**

