Séries Temporais e Modelos Dinâmicos em Econometria

Marcelo C. Medeiros

Departamento de Economia
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Aula 3

Condições para Estacionariedade de Segunda Ordem

- Considere por enquanto um VAR de primeira ordem, VAR(1):

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1\mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{v}_t.$$

- Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}_1 &= \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1\mathbf{z}_0 + \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{z}_2 &= \mathbf{C}_0\left(\mathbf{I} + \mathbf{C}_1\right) + \mathbf{C}_1^2\mathbf{z}_0 + \mathbf{C}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\
\mathbf{z}_3 &= \mathbf{C}_0\left(\mathbf{I} + \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_1^2\right) + \mathbf{C}_1^3\mathbf{z}_0 + \mathbf{C}_1^2\mathbf{v}_1 + \mathbf{C}_1\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \\
&\vdots \\
\mathbf{z}_t &= \mathbf{C}_0\sum_{i=0}^{t-1}\mathbf{C}_1^i + \mathbf{C}_1^t\mathbf{z}_0 + \sum_{i=0}^{t-1}\mathbf{C}_1^i\mathbf{v}_{t-i}.
\end{aligned}$$

Condições para Estacionariedade de Segunda Ordem

- Suponha que a matriz $\mathbf{C}_1$ tenha m autovalores distintos.
- Portanto,

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{T}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{T}^{-1},$$

onde

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}$$

é a matriz de autovalores e $\mathbf{T}$ é a matriz de autovetores.

- É trivial mostrar que $\mathbf{C}_1^i = \mathbf{T}\boldsymbol{\Lambda}^i\mathbf{T}^{-1}$.

Condições para Estacionariedade de Segunda Ordem

- Caso $|\lambda_j| < 1$, $j = 1, \ldots, m$:

$$\mathbf{C}_1^t \longrightarrow 0, \text{ quando } t \longrightarrow \infty \text{ e}$$

$$\mathbf{C}_0 \sum_{i=0}^{t-1} \mathbf{C}_1^i \longrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{C}_1)^{-1}\mathbf{C}_0, \text{ quando } t \longrightarrow \infty.$$

- Portanto,

$$\mathbb{E}(\mathbf{z}_t) \longrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{C}_1)^{-1}\mathbf{C}_0, \text{ quando } t \longrightarrow \infty.$$

A média de $\mathbf{z}_t$ é assintoticamente constante!

Condições para Estacionariedade de Segunda Ordem

- Da mesma forma, podemos mostrar que quando $|\lambda_j| < 1$, $j = 1, \ldots, m$, a variância assintótica de $\mathbf{z}_t$ é dada por:

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \text{vec}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{z,t}\right) = \text{vec}\left(\boldsymbol{\Sigma}_z\right) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{C}_1 \otimes \mathbf{C}_1\right)^{-1} \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}_v),$$

  onde $\boldsymbol{\Sigma}_v = \mathbb{E}(\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t')$.

- Além disso,

$$\mathbb{COV}(\mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-h}) \longrightarrow \boldsymbol{\Gamma}_h \equiv \mathbf{C}_1^h \boldsymbol{\Sigma}_z, \text{ quando } t \longrightarrow \infty.$$

Condições para Estacionariedade de Segunda Ordem

Resultado Importante - VAR(1)

Quando os autovalores da matriz $\mathbf{C}_1$ forem todos menores do que 1 em módulo, o processo VAR(1) será assintoticamente estacionário de segunda ordem.

- O processo VAR só será estacionário assintoticamente ("steady-state").
- O que acontece quando os autovalores de $\mathbf{C}_1$ não são distintos?
- Quais são as condições de estacionaridade do processo VAR(p)?

Condições para Estacionariedade de Segunda Ordem

- Considere por enquanto um VAR de ordem p, VAR(p):

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1\mathbf{z}_{t-1} + \cdots + \mathbf{C}_p\mathbf{z}_{t-p} + \mathbf{v}_t.$$

- O processo VAR(p) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_t \\ \mathbf{z}_{t-1} \\ \mathbf{z}_{t-2} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{t-p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \cdots & \mathbf{C}_{p-1} & \mathbf{C}_p \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{t-1} \\ \mathbf{z}_{t-2} \\ \mathbf{z}_{t-3} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_t \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Condições para Estacionariedade de Segunda Ordem

Resultado Importante - VAR(p)

Quando os autovalores da matriz $\mathbf{F}$ forem todos menores do que 1 em módulo, o processo VAR(p) será assintoticamente estacionário de segunda ordem.

Estacionariedade e Função de Resposta ao Impulso

- Um VAR(1) assintoticamente estacionário de segunda ordem pode ser representado, em "steady-state" (equilíbrio), da seguinte forma:

$$\mathbf{z}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_1)^{-1}\mathbf{C}_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{C}_1^i \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u}_{t-i}$$

$$\mathbf{z}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_1)^{-1}\mathbf{C}_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\underbrace{\left(\mathbf{T}\boldsymbol{\Lambda}^i\mathbf{T}^{-1}\right)}_{\longrightarrow 0,\, i \longrightarrow \infty}\mathbf{B}^{-1}}_{\boldsymbol{\Phi}_i}\mathbf{u}_{t-i}.$$

- Portanto, para um processo VAR(1) assintoticamente estacionário, a FRI tenderá <u>exponencialmente</u> para zero! O mesmo vale para um VAR(p) estacionário.

Estacionariedade e Função de Resposta ao Impulso

- O formato específico da FRI irá depender dos autovalores da matriz $\mathbf{F}$.
  - No caso do VAR(1), $\mathbf{F} = \mathbf{C}_1$.
- Autovalores complexos implicam em uma FRI senoidal com amplitude exponencialmente amortecida $\Rightarrow$ Comportamento cíclico!
- Quando os autovalores forem reais, a FRI não irá apresentar dinâmica cíclica.

Modelos Estruturais e Função de Resposta ao Impulso

Importante

Em geral, modelos estruturais na forma

$$\mathbf{B}\mathbf{z}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}(L)\mathbf{z}_t + \mathbf{u}_t$$

são interpretados em termos das suas FRIs e não dos parâmetros do modelo, uma vez que estes raramente representam os parâmetros de um modelo comportamental.

O Processo Auto-Regressivo com Defasagens Distribuídas

- Um caso particular importante do modelo estrutural descrito anteriormente é o modelo auto-regressivo com defasagens distribuídas (ARDL):

$$y_t = a_{0,y} - \mathbf{b}'_{yx}\mathbf{x}_t + \sum_{i=1}^{p}\left(a_{i,y}y_{t-i} + \mathbf{a}'_{i,yx}\mathbf{x}_{t-i}\right) + u_{y,t}$$

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=0}^{p}\beta'_i\mathbf{x}_{t-i} + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i y_{t-i} + u_{y,t}.$$

- Como devemos interpretar os coeficientes de um modelo ARDL?

O Processo Auto-Regressivo com Defasagens Distribuídas

- Equilíbrio de longo-prazo (sob estacionariedade):

$$\begin{aligned} y_t &= y_{t-1} = \cdots = y_{t-p} = \mathbb{E}(y_t) = y^* \\ \mathbf{x}_t &= \mathbf{x}_{t-1} = \cdots = \mathbf{x}_{t-p} = \mathbb{E}(\mathbf{x}_t) = \mathbf{x}^* \\ u_{y,t} &= u_{y,t-1} = \cdots = u_{y,t-p} = 0. \end{aligned}$$

- Portanto, o modelo ARDL torna-se em equilíbrio:

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{\alpha_0}{\alpha_p(1)} + \frac{\boldsymbol{\beta}_p(1)'}{\alpha_p(1)}\mathbf{x}^* \\ y^* &= \alpha + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}^*. \end{aligned}$$

- $\boldsymbol{\beta}$ é conhecido como Multiplicador de Longo-Prazo.
- Podemos mostrar que $\boldsymbol{\beta}$ representa o efeito no longo-prazo em y de um choque unitário em $\mathbf{x}$ no instante t.

Modelo com Correção de Erros

Decomposição de Beveridge-Nelson (BN)

Todo polinômio

$$a_p(L) = a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + \cdots a_p L^p$$

pode ser representado da sequinte forma:

$$a_p(L) = a_p(1) + a^*_{p-1}(L)(1-L), \text{ onde}$$

$$a^*_{p-1}(L) = a^*_0 + a_1 L + a_2 L^2 + \cdots a^*_{p-1} L^{p-1} \text{ e}$$

$$a^*_j = -\sum_{k=j+1}^{p} a_k, \; j = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Modelo com Correção de Erros

- A partir da decomposição BN podemos mostrar que:

$$
\begin{aligned}
a_p(L) &= a_p(1)L + a^{**}_{p-1}(L)(1-L),\\
a^{**}_{p-1}(L) &= a^{*}_{p-1}(L) + a_p(1).
\end{aligned}
$$

Modelo com Correção de Erros

- O modelo ARDL pode ser escrito da seguinte forma:

$$\alpha_p(L)y_t = \alpha_0 + \boldsymbol{\beta}'_p(L)\mathbf{x}_t + u_{y,t},$$

onde:

$$\alpha_p(L) = 1 - \alpha_1 L + \cdots + \alpha_p L^p,$$
$$\boldsymbol{\beta}_p(L) = \boldsymbol{\beta}_0 + \boldsymbol{\beta}_1 L + \cdots + \boldsymbol{\beta}_p L^p.$$

Modelo com Correção de Erros

- Pela decomposição de BN:

$$\alpha^{**}_{p-1}(L)\Delta y_t = \alpha_0 + \boldsymbol{\beta}^{**}_{p-1}(L)'\Delta \mathbf{x}_t - \alpha(y_{t-1} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_{t-1}) + u_{y,t},$$

$\Rightarrow$ <u>Modelo com Correção de Erros (ECM)</u>

onde:

$$\alpha = \alpha_p(1), \text{ e}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_p(1)/\alpha \Rightarrow$$ <u>Multiplicador de Longo-Prazo</u>.

Modelo com Correção de Erros

- Qual é a interpretação para o ECM?

$$\alpha^{**}_{p-1}(L)\Delta y_t = \alpha_0 + \boldsymbol{\beta}^{**}_{p-1}(L)'\Delta \mathbf{x}_t - \alpha(y_{t-1} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_{t-1}) + u_{y,t},$$

$$\underbrace{\Delta y_t}_{\text{Movimentos de curto-prazo}} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha^{**}_i \Delta y_{t-1} + \boldsymbol{\beta}^{**}_{p-1}(L)'\Delta \mathbf{x}_t$$

$$- \alpha \underbrace{(y_{t-1} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_{t-1})}_{\text{Desvio em relação ao equilíbrio de longo-prazo}}$$

$$+ u_{y,t}.$$

Modelos com Fatores Comuns

- Sem perda de generalidade, vamos considerar que $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}$.
- Suponha também que o modelo ARDL possa ser escrito da seguinte forma:

$$\alpha_p(L)y_t = \alpha_0 + \beta_p(L)x_t + u_{y,t},$$
$$\alpha_{1,p-1}(L)\theta_1(L)y_t = \alpha_0 + \beta_{1,p-1}(L)\theta_1(L)x_t + u_{y,t}.$$

- $\theta_1(L)$ é um fator comum aos polinômios $\alpha_p(L)$ e $\beta_p(L)$ e representa a existência de uma raiz comum.
- Logo,

$$\alpha_{1,p-1}(L)y_t = \frac{\alpha_0}{\theta_1(L)} + \beta_{1,p-1}(L)x_t + \frac{u_{y,t}}{\theta_1(L)},$$
$$\alpha_{1,p-1}(L)y_t = \widetilde{\alpha}_0 + \beta_{1,p-1}(L)x_t + e_t.$$

- Note que $\theta_1(L)e_t = u_{y,t} \Rightarrow e_t$ é um processo AR(1)!