

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA**

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

**EXISTEM GANHOS NO USO DE ESTIMADORES MAIS SOFISTICADOS DE
VOLATILIDADE?**

**“Declaro que o presente trabalho é de minha autoria e que não recorri,
para realizá-lo, a nenhuma forma de ajuda externa, exceto quando
autorizado pelo professor tutor”.**

**ALAN TOWERSEY
MATRÍCULA: 0116278**

ORIENTADOR: MARCELO CUNHA MEDEIROS

DEZEMBRO / 2004

“As opiniões expressas neste trabalho são de responsabilidade única e exclusiva do autor”.

ÍNDICE

1 Introdução	5
2 Revisão da literatura	8
3 Metodologia	15
4 Resultados	19
5 Conclusão	25
6 Apêndice	26
7 Bibliografia	28

Tabelas

TABELA 1 – Comparativo de utilidade Realizado por Fleming, Kirby e Ostiek (2001)

TABELA 2 – Os quatro momentos das distribuições empíricas dos três ativos utilizados no trabalho.

TABELA 3 – Resultado dos GARCH estimados.

TABELA 4 – Utilidades dos retornos dos portfólios dos diferentes estimadores.

TABELA 5 – Diferença entre as utilidades do estimador usual e do sofisticado.

Gráficos

GRÁFICO 1 – Pesos dados às defasagens dos elementos da matriz covariância

GRÁFICO 2 – Pesos do portfólio obtido utilizando toda a amostra com a estratégia sofisticada.

GRÁFICO 3 – Erro quadrático médio com o parâmetro variando de 0 a 1.

GRÁFICO 4 – Erro quadrático médio com o parâmetro variando de 0 a 0,1.

GRÁFICO 5 – Pesos do portfólio ao longo do tempo.

GRÁFICO 6 – Utilidade da estratégia com estimador sofisticado.

GRÁFICO 7 – Utilidade da estratégia com estimador usual.

GRÁFICO 8 – Diferença entre as utilidades obtidas com estimadores sofisticado e usual.

1 Introdução

Um dos grandes divisores de águas no desenvolvimento da modernidade é a descoberta e o estudo do risco. Antigamente dentro da filosofia teocentrista, o futuro não era nada mais que vontade dos deuses, capricho do destino e sua explicação era de domínio obscuro de oráculos e adivinhos que detinham o monopólio sobre o conhecimento dos eventos somente por eles previstos.

O advento da teoria da probabilidade por matemáticos, que por hora fizeram dela um brinquedo de apostadores, tornaram-na um instrumento poderoso de logística, modelagem, previsão e aplicação das informações. A evolução da teoria desemboca na estatística, instrumento como que mágico que serve de ponte entre o mundo teórico da matemática e os dados gerados por processos da vida real onde reside a incerteza. Técnicas quantitativas de administração de risco ajudaram a desencadear o ritmo dos tempos modernos: descobrir que risco é uma opção e não um destino foi uma percepção fundamental para pensarmos como o fazemos hoje.

A gestão de risco tem papel importante em várias áreas distintas da sociedade. Por exemplo, é importante saber quais as chances de choverem diferentes quantidades de água, de forma a manter os reservatórios de usinas hidrelétricas em um nível saudável, gastar água demais pode causar falta de energia no futuro e gastar de menos pode custar caro devido ao emprego de formas mais custosas em alternativa ao uso de energia hidrelétrica.

O objetivo desse trabalho é avaliar economicamente o valor do emprego de estimativas de volatilidade e optou-se por escolher o setor de finanças para a aplicação do estudo.

O mercado financeiro desempenha um papel importante na sociedade. Como a renda de agentes econômicos não costuma acompanhar a sua trajetória desejada de consumo, gera-se um descasamento entre a disponibilidade e o desejo de gastos do agente. O mercado financeiro serve para eliminar esses descasamentos intertemporais, portanto suavizando a trajetória de consumo. Como muitos dos ativos empregados pelo mercado financeiro na alocação dos excessos de recursos são voláteis ou ilíquidos a gestão de risco tem papel fundamental nesta área de atuação.

Medidas de volatilidade são fundamentais na gestão de risco, não só para se obter o controle da probabilidade de certos eventos ocorrerem, mas até na precificação de ativos financeiros que são utilizados na gestão de risco.

Segundo Hull (2000) o modelo Black & Scholes de apreçamento de derivativos está calcado em estimativas de volatilidade. A obtenção de boas estimativas de volatilidade e o uso deste modelo permitem a obtenção do preço justo de derivativos financeiros. A uso do modelo de apreçamento de Black & Scholes é tão bem aceita que não é apenas utilizado por instituições financeiras, mas também por bolsas de valores e instituições reguladoras.

Na vasta literatura econométrica há evidências, geralmente consistentes através de diversos modelos, de que a volatilidade de ativos financeiros é previsível até certo ponto, diferentemente de preços destes. Contudo os modelos explicam apenas uma pequena parte desta volatilidade, levando alguns a questionar a relevância deste modelos.

O tema central do trabalho consistirá então na comparação entre a utilidade de um investidor avesso ao risco utilizando estimador usual de variância, contraposto ao estimador dinâmico.

Para mensurar o valor econômico de um estimador de volatilidade, este trabalho utilizará uma função de utilidade de um agente avesso ao risco, que deve deixar de forma bem clara a existência ou não de valor adicionado.

O estimador de volatilidade utilizado para averiguar a existência de valor econômico será o estimador de pesos dinâmicos desenvolvido por Foster e Nelson (1996). Este estimador foi desenvolvido em seguimento ao trabalho de Bollerslev, Engel e Wooldridge (1988) e além de não ser muito parametrizado como modelos ARCH e GARCH multivariados, não é tão complicado e computacionalmente pesado. Mesmo sendo um estimador simples de entender e implementar, ele abrange uma vasta gama de modelos ARCH e GARCH segundo Fleming, Kirby e Ostiek (2001).

Os dados utilizados na comparação serão os retornos dos três principais ativos disponíveis para investimentos no Brasil: o CDI (Certificado de depósito Interbancario), o IBOVESPA (Índice da Bolsa de Valores de São Paulo) e o Dólar. Além da compra direta dos ativos, estes também tem futuros negociados na BM&F (Bolsa de Mercadorias e Futuros), portanto podem ser hedgeados.

Caso venha a se confirmar o valor econômico presente no estimador este trabalho, servirá para divulgar e incentivar o estudo de modelos mais sofisticados de mensuração de volatilidade estocástica.

2 Revisão da literatura

ARCH

Modelos econométricos tradicionais assumem que seja constante a variância para previsões um passo a frente. A fim de generalizar essa premissa irrealista, Engel (1982) introduziu a classe de modelos Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (**ARCH**). O modelo **ARCH** parte do princípio que a variância de um processo estocástico pode ser caracterizada por um processo autoregressivo. Abaixo se encontra a formulação de um processo ARCH (p)

$$\begin{aligned}y_t | \psi_{t-1} &\sim N(\mathbf{x}_t \boldsymbol{\beta}, h_t), \\h_t &= h(u_{t-1}, u_{t-2}, \dots, u_{t-p}, \boldsymbol{\alpha}), \\ \mathbf{u}_t &= \mathbf{y}_t - \mathbf{x}_t \boldsymbol{\beta} \\ u_t &= h_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p u_{t-p}^2\end{aligned}$$

A parte ARCH do modelo é caracterizada fundamentalmente pelas últimas duas linhas das equações acima. O modelo que gera u_t não é a questão central, pois a proposta da heterocedasticidade condicional está relacionada com o erro e não ao processo pelo qual foi gerado, por exemplo processo ARIMA, STAR, ARNN ou qualquer outro.

A condição de estacionariedade para a variância de um ARCH (p) é análoga a de num processo AR (p), ou seja, as raízes do polinômio

$$1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_p z^p = 0$$

estarem fora do círculo unitário. Como h_t (a variância condicional) deve ser estritamente positiva, costuma-se fazer a restrição: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p > 0$ e a condição de estacionariedade pode então ser simplificada para $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p < 1$. A variância incondicional da variável dependente no modelo pode ser obtida então por:

$$\sigma_y^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_p}$$

A estimação do modelo **ARCH** pode ser feita por Mínimos Quadrados Ordinários (**MQO**), contudo como mostrado por Engel (1982), a estimação por máxima verossimilhança é mais eficiente. Engel sugere um algoritmo

$$\alpha^{i+1} = \alpha^i + [\tilde{z}'\tilde{z}]^{-1} \tilde{z}' f_t^i$$

onde

$$\tilde{z}_t = (1, e_{t-1}^2, \dots, e_{t-p}^2) / h_t^i,$$

$$\tilde{z}_t' = (\tilde{z}_1', \dots, \tilde{z}_T')$$

$$f_t^i = (e_t^2 - h_t^i) / h_t^i$$

$$f_t^{i'} = (f_1^i, \dots, f_T^i)$$

Sendo e_t o resíduo da iteração i , h_t^i a variância condicional estimada e α^i a estimativa do vetor de parâmetros desconhecidos da interação i .

GARCH

Uma generalização do modelo **ARCH** foi desenvolvida por Bollerslev (1986): o modelo **GARCH**. Nesta especificação, seja y_t uma variável aleatória que segue um processo GARCH(p,q), então

$$u_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p u_{t-p}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \dots + \beta_q h_{t-q}$$

A interpretação dos parâmetros β é análoga à parte **MA** de um processo **ARMA** (Auto-Regressive Moving Average). A variância incondicional pode ser obtida então por

$$\sigma_y^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p - \beta_1 - \dots - \beta_q}$$

Assim como no ARCH, a estimação do GARCH pode ser feita por MQO. Contudo, o estimador de descida mais íngreme obtido por máxima verossimilhança é mais eficiente.

Valor Econômico do Timing de Volatilidade:

Fleming, Kirby e Ostiek (2001) desenvolveram um trabalho cujo objetivo era a de avaliar o valor econômico de estimativas dinâmicas de volatilidade para investidores avessos ao risco.

A metodologia utilizada é a obtenção de retornos de um portfólio dinâmico ajustado a cada momento pela matriz variância-covariância e retornos esperados, contrapondo estes retornos aos de uma carteira de maximização de retorno com uma volatilidade esperada.

Os ativos utilizados no trabalho são ouro, S&P e o T-Bond.

A implementação da estratégia é construída com base na teoria média-variância com alocação de recursos no curto prazo. A simplicidade presente na implementação não apresenta problemas, pois o resultado do uso de estratégias subótimas reforça os a serem obtidos por estratégias mais sofisticadas. O uso da teoria média variância facilita a análise da performance do portfolio assim como a da utilidade de um investidor avesso ao risco com função de utilidade quadrática

A metodologia desenvolvida é obtida da seguinte forma, seja \mathbf{R}_{t+1} , $\boldsymbol{\mu} \equiv E[\mathbf{R}_{t+1}]$ e $\boldsymbol{\Sigma}_t \equiv E[(\mathbf{R}_{t+1} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{R}_{t+1} - \boldsymbol{\mu})']$, respectivamente, um vetor $N \times 1$ de retornos de ativos, o valor esperado de \mathbf{R}_{t+1} e a matriz variância covariância de \mathbf{R}_{t+1} . A cada data t o investidor resolve o programa quadrático.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}_t} \mathbf{w}_t' \Sigma_t \mathbf{w}_t \\ \text{s.a. } \mathbf{w}_t' \boldsymbol{\mu} = \mu_p \end{aligned}$$

onde \mathbf{w}_t é um vetor $N \times 1$ dos pesos do portfólio e μ_p é o valor do retorno esperado pela carteira.. A solução do problema quadrático,

$$\mathbf{w}_t = \frac{\mu_p \Sigma_t^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\mu}' \Sigma_t^{-1} \boldsymbol{\mu}}$$

Para estimar a matriz variância-covariância utiliza-se a metodologia desenvolvida por Foster e Nelson (1996) com estimadores dinâmicos que são construídos baseados na optimalidade assintótica.

A classe de estimadores dinâmicos pode ser escrita como

$$\hat{\sigma}_{ij,t} = \sum_{l=-t+1}^{T-t} \omega_{ij,t+l} (r_{i,t+l} - \mu_i)(r_{j,t+l} - \mu_j)$$

onde r_{it} e r_{jt} denotam os retornos dos ativos i e j respectivamente, $\omega_{ij,t+l}$ é os peso para cada o produto de cada inovação nos retornos de $t+l$, e T é o numero de observações na amostra. Ainda que a equação acima admita uma vasta gama de esquemas de pesos, Foster e Nelson (1996), seguindo o trabalho iniciado por Engel, Bollerslev e Wooldridge (1988), demonstraram que a estratégia ótima é a de construir pesos que decaiam exponencialmente à medida que l aumenta.

A forma precisa dos pesos ótimos depende das características do processo de volatilidade. Se a volatilidade for estocástica, estão os pesos dos estimadores serão dados por.

$$\omega_{ij,t+l} = (\alpha_{ij,t} / 2) e^{-\alpha_{ij,t}|l|}$$

Como é difícil se assegurar que a matriz será positiva definida impõe-se a restrição $\alpha_{ij,t} = \alpha_t$. Estima-se então a taxa ótima de descaimento α_t minimizando o erro quadrático médio do estimador $\sigma_t^2 = \mathbf{w}_t' \boldsymbol{\Sigma}_t \mathbf{w}_t$.

Para fazer a comparação entre as séries de retornos geradas pelos dois portfólios construídos, se faz necessária uma medida que expresse o trade-off entre risco e retorno. Utiliza-se então uma generalização do critério de West, Edison e Cho (1993) para ranking de performances de modelos de previsão. Esta medida baseia-se na proximidade entre a análise média variância e utilidade quadrática.

Em geral pode-se entender a utilidade quadrática como uma aproximação de segunda ordem para a função de utilidade verdadeira do investidor. Diante desta aproximação, a utilidade realizada do investidor pode ser escrita como

$$U(W_{t+1}) = W_t R_{p,t+1} - \frac{\alpha W_t^2}{2} R_{p,t+1}^2$$

onde W_{t+1} é o bem estar do investidor em $t+1$, α é a taxa de aversão ao risco e

$$r_t = R_f + \boldsymbol{\omega}_t' \mathbf{r}_{t+1}$$

é o retorno de seu portfólio em $t+1$. Para facilitar a comparação entre os portfólios, mantém-se αW_t constante. Isto é equivalente a fazer com que a aversão ao risco relativa $\gamma_t = \alpha W_t / (1 - \alpha W_t)$ seja igual a um valor fixo γ . Com a aversão ao risco constante, pode-se usar uma utilidade realizada média, $\bar{U}(\bullet)$, para estimar de forma consistente a utilidade gerada por um nível inicial de bem estar. Em particular temos

$$\bar{U}(\bullet) = W_0 \left(\sum_{t=0}^{T-1} R_{p,t+1} - \frac{\gamma}{2(1+\gamma)} R_{p,t+1}^2 \right)$$

onde W_0 é o bem estar inicial.

Estima-se o valor do timing de volatilidade equacionando as utilidades médias de dois portfólios alternativos. Suponha por exemplo, que um portfólio estático angaria sempre a mesma utilidade média que um portfólio dinâmico com custos diários de Δ , como fração do bem estar investido. Como o investidor estaria indiferente às duas alternativas, interpreta-se Δ como o máximo de performance que o indivíduo estaria disposto a pagar para trocar a estratégia estática pela dinâmica. Para estimar isso encontra-se o valor de Δ que satisfaz a

$$\sum_{t=0}^{T-1} (R_{d,t+1} - \Delta) - \frac{\gamma}{2(1+\gamma)} (R_{d,t+1} - \Delta)^2 = \sum_{t=0}^{T-1} R_{s,t+1} - \frac{\gamma}{2(1+\gamma)} R_{s,t+1}^2$$

onde $R_{d,t+1}$ e $R_{s,t+1}$ denotam respectivamente os retornos do uso das estratégias dinâmicas e estáticas. Reporta-se as estimativas de Δ em pontos base anualizados utilizando 1 e 10 como diferentes valores de γ . A tabela abaixo mostra os resultados obtidos por Fleming, Kirby e Ostiek(2001)¹.

Tabela 1

α	Static Portfolio			Dynamic Portfolio			p -value	Δ_1	Δ_{10}
	μ	σ	SR	μ	σ	SR			
Panel A: Minimum Volatility Strategies									
0.001	8.78	10.99	0.802	9.01	10.99	0.823	0.9364	23.4	23.4
0.005	8.83	11.07	0.801	9.38	10.74	0.876	0.9925	59.1	94.5
0.010	8.81	11.04	0.801	9.15	10.56	0.870	0.9724	39.4	90.9
0.020	8.85	11.10	0.800	9.00	10.48	0.862	0.9440	22.0	87.9
0.040	8.79	11.03	0.800	8.84	10.37	0.857	0.9275	12.6	82.4
0.060	8.84	11.10	0.800	8.78	10.50	0.841	0.8565	1.1	65.3
0.080	8.78	11.02	0.800	8.58	10.53	0.820	0.7115	-13.9	37.3
0.100	8.85	11.07	0.802	8.54	10.70	0.802	0.5624	-26.9	12.5

Foi utilizado $\mu_p = 10\%$ para calcular os pesos do portfólio ótimo na tabela acima. Devido aos Δ 's majoritariamente positivos, os resultados são geralmente favoráveis à

¹ Os resultados obtidos com os dados de futuros dos três ativos anteriormente citados

estratégia de portfólio dinâmico, exceto quanto a taxa de aversão ao risco é baixa e o parâmetro α de amortecimento exponencial é alto demais.

3 Metodologia

Os dados utilizados serão os retornos diários dos principais representantes dos três tipos de investimento mais populares no mercado financeiro, o dólar, o Ibovespa e o CDI. A fonte de dados foi banco de séries temporais do Banco Central do Brasil², e o período escolhido foi de 1º de junho de 1999 até 14 de outubro de 2004. Não foram utilizados dados de anos anteriores devido à crise e à mudança de regime cambial no início de 1999.

O dólar utilizado será o comercial.

O Ibovespa é o principal índice de ações do Brasil, pois sua carteira é constituída por ações de maior índice de negociabilidade³. O objetivo do índice é justamente representar o desempenho dos investimentos na bolsa como um todo. Para isso os dividendos são ajustados como se fossem reinvestidos na carteira.

O CDI é a taxa de referência para depósitos de um dia para o próximo, assim representando o principal parâmetro de rendimento de ativos de renda fixa.

O software a ser utilizado no processamento dos dados é o MATLAB⁴ por apresentar maior facilidade na manipulação de matrizes.

A implementação do estudo começa com a descrição quantitativa dos dados quanto aos seus momentos de distribuição, e segue com a estimação de modelos GARCH para os três diferentes ativos. Esta estimação é feita para se evidenciar a existência de volatilidade estocástica nestes ativos financeiros. A evidência de que os processos geradores de volatilidade não são independentes ao longo do tempo favorecem a hipótese de que devem haver ganhos em medidas mais sofisticadas de volatilidade.

Para verificar os possíveis ganhos de se utilizar o estimador dinâmico de volatilidade, será utilizado um da classe desenvolvida por Foster e Nelson (1996) em seguimento ao trabalho iniciado por Engel, Bollerslev e Wooldridge (1988). A classe de estimadores pode ser definida como

² Disponível para acesso público em <http://www.bcb.gov.br/?SERIETEMP>

³ O índice de negociabilidade é uma média geométrica entre a fração do número de negócios em relação ao total da bolsa e do volume negociado em relação ao total.

⁴ Marca registrada pela Mathworks.

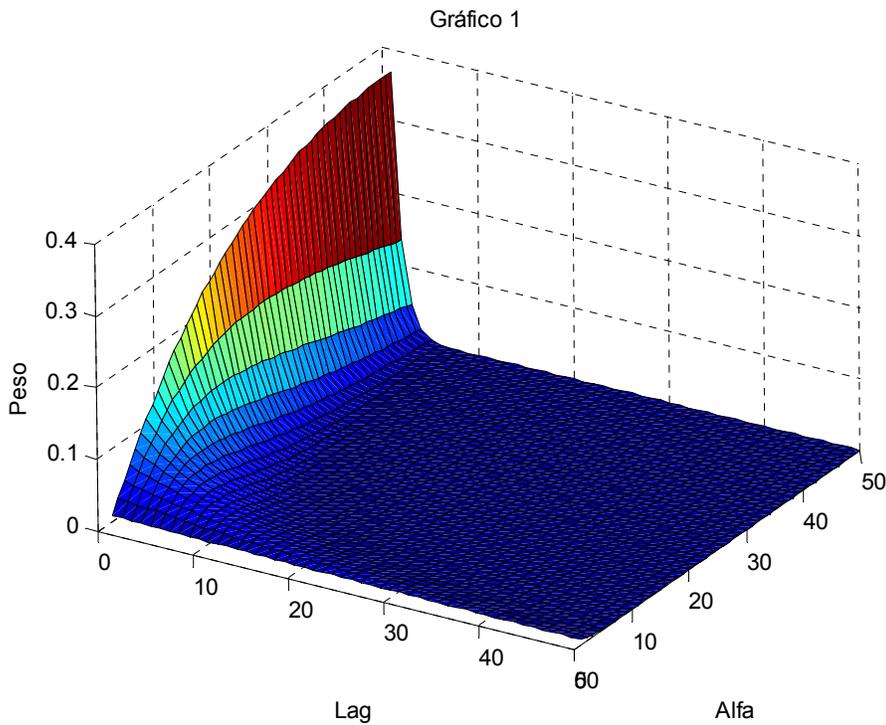
$$\hat{\sigma}_{ij,t} = \sum_{l=-t+1}^{T-t} \omega_{ij,t+l} (r_{i,t+l} - \mu_i)(r_{j,t+l} - \mu_j)$$

A estratégia ótima na construção do estimador também define que o peso das covariâncias decaia à medida que l aumenta, conceito similar ao de inversibilidade, muito conhecido em séries temporais. Como se deseja que o estimador seja unilateral, ou seja, que apenas se considere a volatilidade passada e não a futura, assim como também se deva garantir a inversibilidade e simetria da matriz covariância, a forma de decaimento dos pesos seguirá a seguinte regra

$$w_{i,j} = \alpha e^{-l} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

Abaixo encontra-se o gráfico com os pesos dados às defasagens dos elementos da matriz covariância para diferentes valores de α variando em 0,02 no intervalo $(0,1]$.

Gráfico 1



Como se percebe no gráfico, o valor do parâmetro muda muito a forma com que se distribuem os pesos das defasagens da matriz covariância.

Para evitar a arbitrariedade no uso do parâmetro α , este será calculado de forma a minimizar o erro quadrático médio do estimador $\sigma_t^2 = \mathbf{w}_t' \boldsymbol{\Sigma}_t \mathbf{w}_t$ através da busca por força bruta até encontrar um valor satisfatoriamente próximo ao mínimo.

Encontrado o valor de α , pode se começar a comparação entre o uso de técnicas usuais e nosso estimador. Fleming, Kirby e Ostiek (2001), utilizaram o estimador estático de variância, utilizando todo o período da amostra na determinação de um portfólio estático a ser contraposto com o estimador dinâmico de Foster e Nelson (1996). Isto se deve ao objetivo de seu trabalho de avaliar a utilidade no timing da volatilidade.

Neste nosso estudo, como o objetivo é o de comparar um estimador mais sofisticado a um usual, o estimador de Foster e Nelson (1996) será comparado à mesma medida de variância, mas feita de forma dinâmica, até um período antes da alocação do portfólio, assim como é feita à outra estimação da variância. Assim os dois estimadores estarão em condições de igualdade, sendo alimentados pelos mesmos dados disponíveis.

A mensuração da utilidade para o investidor avesso ao risco resume-se a um ganho de utilidade pelo retorno somado a uma perda ocasionada pela volatilidade segundo Pindyck e Rubinfeld (1998), Bodie, Kane e Marcus (2002), e Fleming, Kirby e Ostiek (2001). Será utilizada então a seguinte função

$$U(\bullet) = \sum_{t=0}^{T-1} R_{s,t+1} - \frac{\gamma}{2(1+\gamma)} R_{s,t+1}^2$$

comparando-se a utilidade dos retornos obtidos com os portfólios: o usual e o mais sofisticado. Como o valor de γ , a taxa de aversão ao risco, é arbitrário, permite-se que este valor varie a fim de se ver os impactos na utilidade de investidores mais e menos conservadores.

Ainda há mais uma diferença neste trabalho em relação ao de Fleming, Kirby e Ostiek (2001), que consiste na implementação da estratégia de alocação de portfólio. A estratégia será basicamente a mesma: a de minimizar a variância dos retornos do portfólio para um dado retorno como alvo. Contudo será adicionada uma outra restrição na qual a soma dos pesos do portfólio deva somar 1. Esta restrição facilita a interpretação dos

resultados e evita que ocorram posições como vendido a descoberto ou ociosidade dos recursos do investidor. Com a introdução da nova restrição o problema de otimização⁵ passa a ser:

$$\begin{aligned} \min \omega' \Omega \omega \\ \text{sa } \omega' \mu &= \mu_p \\ \omega' \mathbf{1} &= 1 \end{aligned}$$

Ainda assim, resta saber qual deverá ser o retorno esperado na hora de implementar a estratégia. A solução será a mesma utilizada para a taxa de aversão ao risco, ou seja, de ver o que acontece com os diferentes valores do mesmo.

⁵ A derivação e a solução final do problema de otimização se encontram no apêndice do trabalho.

4 Resultados

Abaixo encontra-se a tabela com os principais momentos dos retornos dos ativos utilizados no estudo. A média μ está anualizada e as outras estatísticas foram computadas e reportadas com base na frequência diária.

Tabela 2

	μ	σ	assim	kurt
CDI	0.1879	9.89E-05	1.1621	3.6338
IBOV	0.1453	0.019079	-0.12844	3.8541
US\$	0.0992	0.009727	-0.53675	11.749

Observa-se que o ativo de maior retorno e menor desvio padrão é o CDI que, por consequência, possui o maior índice de Sharp.

A matriz variância-covariância está representada abaixo ordenada respectivamente por CDI, Ibovespa e dólar⁶.

$$V(X) = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0009 & -0.0007 \\ 0.0009 & 3.6377 & -0.4836 \\ -0.0007 & -0.4836 & 0.9454 \end{bmatrix}$$

Mesmo possuindo retorno baixo, se comparado ao CDI e ao Ibovespa, o dólar pode contribuir muito para a minimização de risco por possuir covariância negativa com estes ativos.

Afim de confirmar que a volatilidade dos ativos não é independente, foram estimados GARCH's (1,1) para os três ativos em questão, e colocados na Tabela 3 abaixo os valores dos parâmetros⁷ estatisticamente significantes a 5%.

⁶ Essa ordem será mantida para os eventuais vetore e matrizes estimados no trabalho.

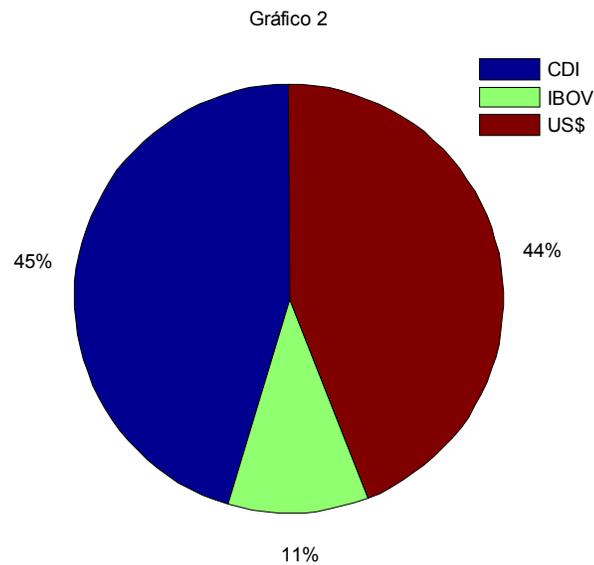
⁷ O parâmetro α representa a porção ARCH e o β a extensão GARCH, seguindo a notação do Capítulo 2.

Tabela 3

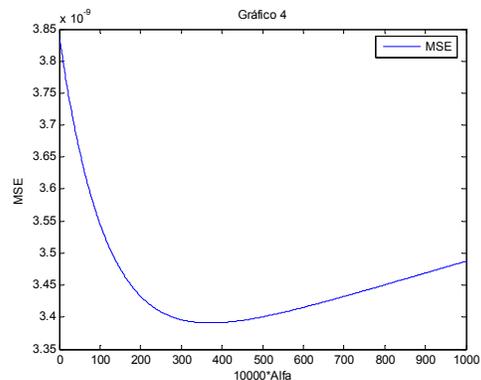
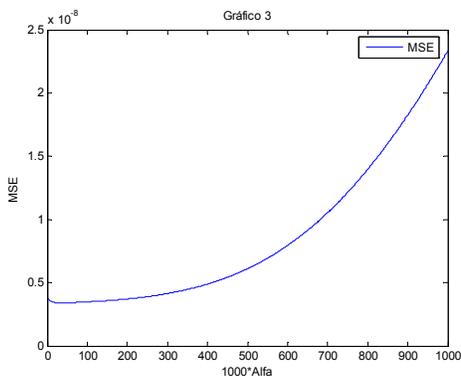
	α	β
CDI	0.80969	
IBOV	0.040503	0.92756
US\$	0.22493	0.76609

A tabela revela que a volatilidade dos retornos não são independentes, favorecendo a tese de que é adequado o uso de um estimador dinâmico.

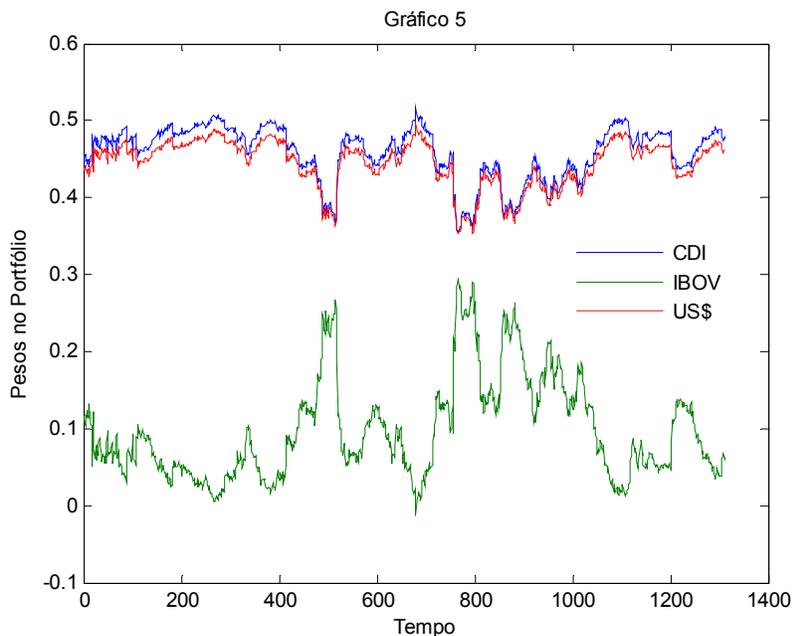
Utilizando a volatilidade de toda a amostra, foram calculados os pesos do portfólio utilizando-se a restrição dos pesos somarem 1. O resultado está no gráfico abaixo.



Para a obtenção da taxa ótima para a determinação dos pesos das defasagens, foi minimizado o erro quadrático de $\sigma_t^2 = \mathbf{w}_t' \Sigma_t \mathbf{w}_t$ em função da taxa α . Abaixo se encontram os gráficos obtidos pelo erro quadrático médio como função da taxa que determina os pesos. No Gráfico 3 o parâmetro varia no intervalo $(0,1]$, e no Gráfico 4, de $(0,0.1]$.



Como pode ser visto no gráfico, a função é “bem comportada”, e valor que minimiza o erro quadratico médio é 0,0372, valor relativamente próximo ao encontrado por Fleming, Kirby e Ostiek (2001), que fora 0,0663. Abaixo, no Gráfico 5, encontram-se os pesos do portfólio utilizando a estratégia de minimização de variância com retorno esperado igual a média do retorno dos três ativos.



Nota-se claramente a relação direta entre os pesos do CDI e do dólar, e a relação inversa destes com o do IBOVESPA.

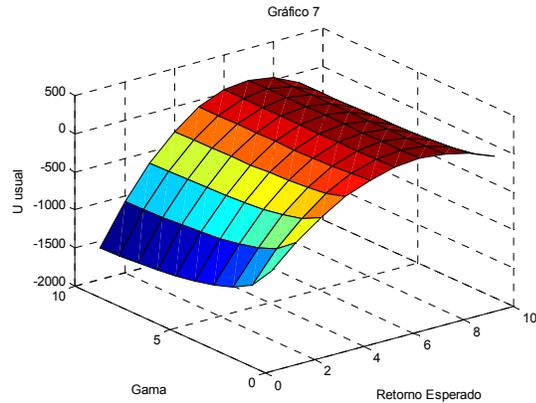
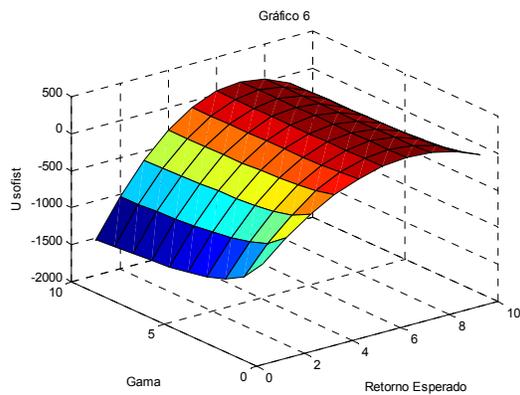
Na Tabela 4, encontram-se as utilidades resultantes da estratégia usual e da mais sofisticada, para diferentes valores da taxa de aversão ao risco(γ) e do valor esperado como alvo da estratégia.

Tabela 4

		Retorno esperado									
Sofist		0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.001	0.0011
Y	1	-825.82	-549.37	-322.5	-145.23	-17.556	60.525	89.013	67.907	-2.7938	-123.09
	2	-1106.8	-742.35	-443.98	-211.73	-45.616	54.377	88.244	55.986	-42.397	-206.91
	3	-1247.3	-838.84	-504.72	-244.98	-59.646	51.303	87.86	50.026	-62.199	-248.82
	4	-1331.7	-896.73	-541.16	-264.94	-68.063	49.458	87.629	46.45	-74.08	-273.96
	5	-1387.9	-935.33	-565.45	-278.24	-73.675	48.228	87.475	44.066	-82.001	-290.72
	6	-1428	-962.9	-582.81	-287.74	-77.684	47.35	87.366	42.363	-87.659	-302.7
	7	-1458.1	-983.57	-595.82	-294.86	-80.69	46.691	87.283	41.085	-91.902	-311.68
	8	-1481.5	-999.65	-605.95	-300.4	-83.029	46.179	87.219	40.092	-95.202	-318.66
	9	-1500.3	-1012.5	-614.04	-304.84	-84.899	45.769	87.168	39.297	-97.842	-324.25
	10	-1515.6	-1023	-620.67	-308.46	-86.43	45.434	87.126	38.647	-100	-328.82

		Retorno esperado									
Usual		0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.001	0.0011
Y	1	-860.47	-571.53	-334.88	-150.54	-18.495	61.251	88.698	63.846	-13.306	-142.76
	2	-1156.9	-775.13	-463.06	-220.72	-48.106	54.773	87.919	51.334	-54.984	-231.03
	3	-1305.2	-876.94	-527.15	-255.81	-62.912	51.533	87.53	45.078	-75.823	-275.17
	4	-1394.1	-938.02	-565.6	-276.86	-71.795	49.59	87.297	41.325	-88.326	-301.65
	5	-1453.4	-978.74	-591.24	-290.89	-77.717	48.294	87.141	38.822	-96.662	-319.31
	6	-1495.8	-1007.8	-609.55	-300.92	-81.947	47.369	87.03	37.035	-102.62	-331.92
	7	-1527.5	-1029.6	-623.28	-308.44	-85.12	46.675	86.946	35.694	-107.08	-341.38
	8	-1552.2	-1046.6	-633.96	-314.29	-87.587	46.135	86.881	34.652	-110.55	-348.74
	9	-1572	-1060.2	-642.51	-318.96	-89.561	45.703	86.829	33.818	-113.33	-354.62
	10	-1588.2	-1071.3	-649.5	-322.79	-91.177	45.35	86.787	33.135	-115.61	-359.44

Abaixo, nos Gráficos 6 e 7, estão plotadas as utilidades obtidas respectivamente com o estimador sofisticado e com o usual, expostas anteriormente na Tabela 4.

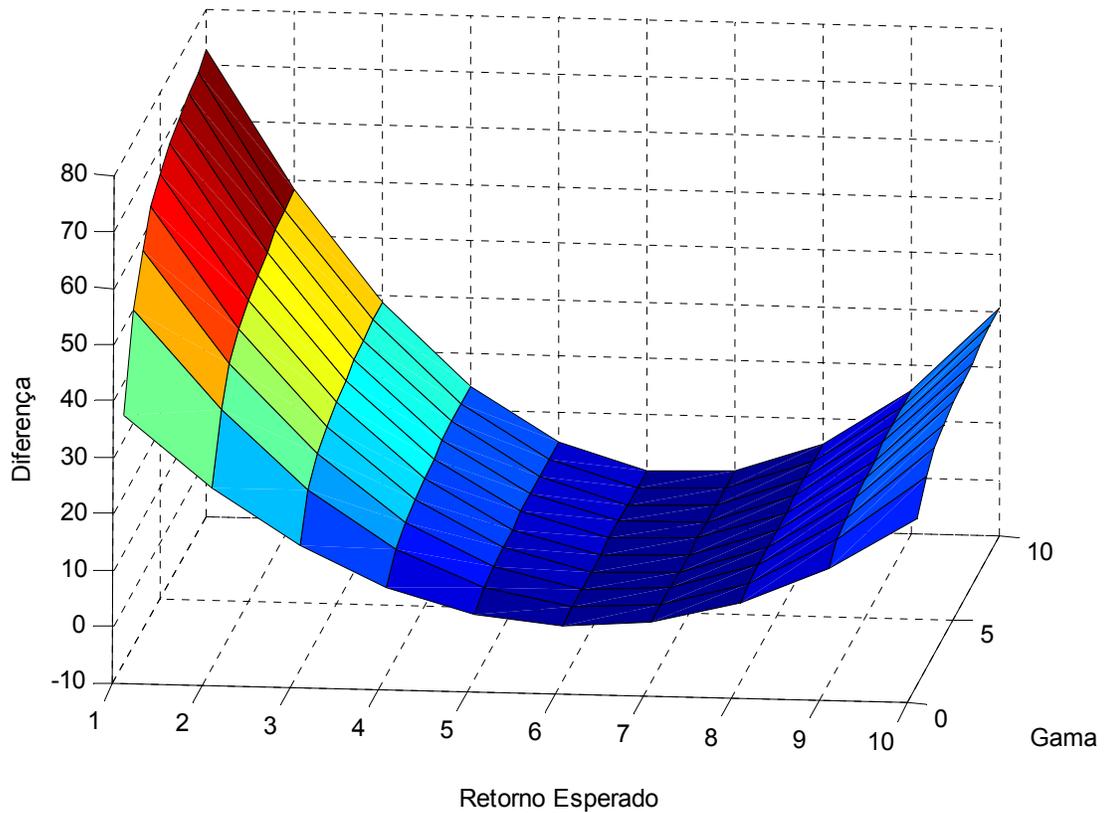


Observa-se o mesmo padrão em ambos os gráficos e, assim, para estabelecer melhor a comparação, encontram-se abaixo a Tabela 5 e o Gráfico 8 com a diferença entre as utilidades $U_{sofist} - U_{usual}$.

Tabela 5

		Retorno esperado										
		Diferença	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.001	0.0011
Y	1	34.65	22.16	12.38	5.31	0.939	-0.726	0.315	4.061	10.5122	19.67	
	2	50.1	32.78	19.08	8.99	2.49	-0.396	0.325	4.652	12.587	24.12	
	3	57.9	38.1	22.43	10.83	3.266	-0.23	0.33	4.948	13.624	26.35	
	4	62.4	41.29	24.44	11.92	3.732	-0.132	0.332	5.125	14.246	27.69	
	5	65.5	43.41	25.79	12.65	4.042	-0.066	0.334	5.244	14.661	28.59	
	6	67.8	44.9	26.74	13.18	4.263	-0.019	0.336	5.328	14.961	29.22	
	7	69.4	46.03	27.46	13.58	4.43	0.016	0.337	5.391	15.178	29.7	
	8	70.7	46.95	28.01	13.89	4.558	0.044	0.338	5.44	15.348	30.08	
	9	71.7	47.7	28.47	14.12	4.662	0.066	0.339	5.479	15.488	30.37	
	10	72.6	48.3	28.83	14.33	4.747	0.084	0.339	5.512	15.61	30.62	

Gráfico 8



Por fim, nota-se que apenas para um investidor menos avesso ao risco, quando o retorno esperado é de 0,007 ao dia⁸, a utilidade é maior com o estimador usual. Em todos os outros casos, e principalmente quando se faz uso de uma função de utilidade com maior aversão ao risco, a utilidade obtida com o estimador mais sofisticado é maior.

⁸ Aproximadamente 19,3% em taxa de retorno anualizada.

5 Conclusão

A conclusão final deste trabalho é de que, principalmente para agentes econômicos mais avessos ao risco, há ganhos no uso de ferramentas mais sofisticadas de estimação e previsão de volatilidade.

Segundo Engel e Patton (2001), um bom modelo de volatilidade tem por característica principal produzir boas previsões. Neste trabalho duas diferentes formas de estimadores de volatilidades foram contrapostas e suas previsões comparadas pela utilidade gerada por elas, e por fim uma estratégia mais sofisticada prevaleceu, ainda que não totalmente à outra.

Uma observação a ser feita ao final deste trabalho é de que, mesmo sendo difícil prever movimentos de retornos diários de ativos financeiros, sua volatilidade não possui distribuição independente ao longo do tempo, ressaltando o valor na pesquisa e desenvolvimento de ferramentas de previsão e controle de risco no mercado financeiro.

Não resta dúvida que ainda há muito a ser feito além do que foi realizado neste trabalho, tanto na consolidação das conclusões com outros dados, quanto na efetuação de outras comparações como as aqui desenvolvidas.

6 Apêndice

Derivação das fórmulas

Minimização de variância sujeita a um retorno esperado:

$$\min \boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega}$$

$$sa \boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\mu} = \mu_p$$

$$L(\boldsymbol{\omega}, \lambda) = \boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega} - \lambda(\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\mu} - \mu_p)$$

$$\frac{\delta L(\boldsymbol{\omega}, \lambda)}{\delta \boldsymbol{\omega}'} = 2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega} - \lambda\boldsymbol{\mu} = 0$$

$$\frac{\delta L(\boldsymbol{\omega}, \lambda)}{\delta \lambda} = \boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\mu} - \mu_p = 0$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\lambda}{2}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu}$$

$$\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\omega} = \frac{\lambda}{2}\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu}$$

$$\mu_p = \frac{\lambda}{2}\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu}$$

$$\lambda = \frac{\mu_p}{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu}}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mu_p\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu}}$$

Minimização de variância sujeita a um retorno esperado e pesos do Portfólio somando 1:

$$\min \boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega}$$

$$sa \boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\mu} = \mu_p$$

$$\boldsymbol{\omega}'\mathbf{1} = 1$$

$$L(\boldsymbol{\omega}, \lambda) = \boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega} - \lambda_1(\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\mu} - \mu_p) - \lambda_2(\boldsymbol{\omega}'\mathbf{1} - 1)$$

$$\frac{\delta L(\boldsymbol{\omega}, \lambda)}{\delta \boldsymbol{\omega}'} = 2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega} - \lambda_1\boldsymbol{\mu} - \lambda_2\mathbf{1}$$

$$\frac{\delta L(\boldsymbol{\omega}, \lambda)}{\delta \lambda_1} = \boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\mu} - \mu_p = 0$$

$$\frac{\delta L(\boldsymbol{\omega}, \lambda)}{\delta \lambda_2} = \boldsymbol{\omega}'\mathbf{1} - 1 = 0$$

$$\omega = \frac{1}{2} \Omega^{-1} (\lambda_1 \mu + \lambda_2 \iota)$$

$$\mu' \omega = \frac{1}{2} (\lambda_1 \mu' \Omega^{-1} \mu + \lambda_2 \mu' \Omega^{-1} \iota)$$

$$\mu_p = \frac{1}{2} (\lambda_1 \mu' \Omega^{-1} \mu + \lambda_2 \mu' \Omega^{-1} \iota)$$

$$1 = \frac{1}{2} (\lambda_1 \iota' \Omega^{-1} \mu + \lambda_2 \iota' \Omega^{-1} \iota)$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu' \Omega^{-1} \mu & \mu' \Omega^{-1} \iota \\ \iota' \Omega^{-1} \mu & \iota' \Omega^{-1} \iota \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu' \Omega^{-1} \mu & \mu' \Omega^{-1} \iota \\ \iota' \Omega^{-1} \mu & \iota' \Omega^{-1} \iota \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mu' \Omega^{-1} \mu & \mu' \Omega^{-1} \iota \\ \iota' \Omega^{-1} \mu & \iota' \Omega^{-1} \iota \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix} = (\mu' \Omega^{-1} \mu \iota' \Omega^{-1} \iota - \iota' \Omega^{-1} \mu \mu' \Omega^{-1} \iota)^{-1} \begin{bmatrix} \iota' \Omega^{-1} \iota & -\mu' \Omega^{-1} \iota \\ -\iota' \Omega^{-1} \mu & \mu' \Omega^{-1} \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \iota' \Omega^{-1} \iota & -\mu' \Omega^{-1} \iota \\ -\iota' \Omega^{-1} \mu & \mu' \Omega^{-1} \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \iota' \Omega^{-1} \iota \mu_p - \mu' \Omega^{-1} \iota \\ \mu' \Omega^{-1} \mu - \iota' \Omega^{-1} \mu \mu_p \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2 (\mu' \Omega^{-1} \mu \iota' \Omega^{-1} \iota - \iota' \Omega^{-1} \mu \mu' \Omega^{-1} \iota)^{-1} (\iota' \Omega^{-1} \iota \mu_p - \mu' \Omega^{-1} \iota)$$

$$\lambda_2 = 2 (\mu' \Omega^{-1} \mu \iota' \Omega^{-1} \iota - \iota' \Omega^{-1} \mu \mu' \Omega^{-1} \iota)^{-1} (\mu' \Omega^{-1} \mu - \iota' \Omega^{-1} \mu \mu_p)$$

$$\omega = \Omega^{-1} \mathbf{D}^{-1} (\iota' \Omega^{-1} \iota \mu_p - \mu' \Omega^{-1} \iota \mu + \mu' \Omega^{-1} \mu - \iota' \Omega^{-1} \mu \mu_p \iota)$$

$$\mathbf{D} = \mu' \Omega^{-1} \mu \iota' \Omega^{-1} \iota - \iota' \Omega^{-1} \mu \mu' \Omega^{-1} \iota$$

7 Bibliografia

Bodie, Z.; Kane A.; Marcus A. J. **Investments**. McGraw Hill , New York, NY 2002.

Bollerslev, T.; Engel R. F.; Wooldridge J. M. **Capital Asset Pricing Model With Time Varying Covariance's**. Journal of Political Economy, 96, 116-131.

Casella, G. ; Berger, R. L. **Statistical Inference**. Duxbury 2002

Engel R. F.; Patton A. J. **What is a Good Volatility Model ?** Quantitative Finance, 1, 237-245.

Hamilton, J. D. **Time Series Analysis**. Princeton University Press, Princeton, NJ 1994.

Hull, J. C. **Options Futures And Other Derivatives**. Prentice Hall , Upper Saddle River, NJ 2000.

Jorion P. **Financial Risk Manager Handbook**. Wiley, New Jersey, NJ 2003.

Fleming, J. Kirbi, C. Ostdiek, B. **The Economic Value of Volatility Timing**. The Journal of Finance, Vol.1 LVI No 1, February 2001.

Foster, D. P.; Nelson D. B. **Continuous Record Asymptotics for Rolling Sample Variance Estimators**.Econometrica 64, 139-174.

Franses, P. H.; Dijk, D. van **Non- Linear Time Series Models in Empirical Finance**. Cambridge University Press, 2000.

Pindyck R. S.; Rubinfeld D. L. **Microeconomics**. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 1998.

Ruud, P. A. **Classical Econometric Theory** Oxford University Press, Oxford, NY 2000.

Tsay, R. S. **Analysis of Financial Time Series**. Wiley Inter-Science 2002.

Wooldridge, J. M. **Introductory Econometrics**. Michigan: South-Western, 2000.