PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

TESTANDO O MODELO BLACK & SCHOLES PARA O MERCADO BRASILEIRO

Alessandro da Costa Nunes

Nº de Matrícula: 9214428-1

Orientador: Marco Antonio Bonomo

Julho de 1997

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

TESTANDO O MODELO BLACK & SCHOLES PARA O MERCADO BRASILEIRO

Alessandro da Costa Nunes

$N^{\underline{o}}$ de Matrícula: 9214428-1

Orientador: Marco Antonio Bonomo

Julho de 1997

"As opiniões expressas neste trabalho são de responsabilidade única e exclusiva do autor"

"Gostaria de dedicar este trabalho a todas as pessoas que contribuíram, de uma forma ou de outra, para a concretização de mais esta etapa de minha vida. Em especial, dedico o presente trabalho àqueles que durante todo o longo período de pesquisa se fizeram presentes, tornando mais fácil e simples a tarefa de aprender e também de escrever: ao Mestre Bonomo, pela orientação e oportunidade de escrever sobre um assunto tão fascinante; a minha namorada, por seu habitual apoio e compreensão; a minha família, por tudo e algo mais; e principalmente aos meus pais, os quais foram, na verdade, os grandes responsáveis por hoje eu estar aqui concluindo este trabalho de final de curso."

A todos meu sincero agradecimento,

Alessandro da Costa Nunes

ÍNDICE

ÍNDICE DE GRÁFICOS E TABELAS

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

I.1-) Motivação

Este trabalho tem como principal objetivo estudar qual o grau de eficiência do modelo de precificação de opções mais difundido até a atualidade no mercado financeiro mundial, que é o modelo de Black & Scholes, quando levamos em conta as particularidades do mercado acionário brasileiro. Minha questão fundamental será a seguinte: O modelo de Black & Scholes funciona adequadamente no mercado financeiro brasileiro(?), ie, ele é capaz de precificar de forma satisfatória as opções negociadas em nosso mercado? Em caso afirmativo, procurarei identificar se tal eficiência é característica ao modelo, ou se é o mercado que, com o passar do tempo, está se ajustando melhor ao mesmo.

Tal questão surgiu, fundamentalmente, a partir da leitura de artigos do prof. Mark Rubinstein, e da discussão acerca da idéia de globalização e sofisticação acelerada dos instrumentos financeiros internacionais observada ultimamente.

Em recente artigo publicado no Journal of Finance[1], o prof. Rubinstein comprova, através de um detalhado procedimento estatístico, que o modelo de Black & Scholes já estaria de certa forma defasado para o mercado financeiro americano desde o crash

[1] Rubinstein, Mark; Journal of Finance: "Implied Binomial Trees";3:770-817, Julho 1994

da bolsa de Nova York em 1987. Isso implicaria em se dizer que o modelo citado não estaria mais conseguindo refletir, de maneira satisfatória, o comportamento dos agentes financeiros em questão, uma vez que nem todas as hipóteses básicas do modelo estariam sendo obedecidas, ie, seria necessária a utilização de algum outro modelo alternativo mais confiável. A minha questão passa a ser a seguinte: seria este um fenômeno particularmente associado aos EUA, ou seria esta uma tendência mundial na qual o Brasil certamente também estaria incluído? A resposta à esta pergunta será discutida em capítulos posteriores acompanhada de um forte embasamento empírico com base nos dados obtidos no mercado financeiro brasileiro. Entretanto, para que seja possível efetuar esta análise, partirei da seguinte hipótese inicial:

H_0: O Modelo Black & Scholes também apresentou o mesmo comportamento para o mercado Brasileiro, ou seja, ele se encontra hoje com uma performance pior do que em anos anteriores.

Uma vez estabelecida esta hipótese, comprovarei matematicamente que é possível rejeitá-la com base em dados recentes de nosso mercado de opções.

A outra idéia à que me referi anteriormente diz respeito à sofisticação do mercado financeiro mundial: num mundo onde o processo de globalização se faz cada dia mais presente, é inegável que a engenharia financeira também apareça com forte destaque. A criação de uma vasta gama de novos produtos financeiros, novos métodos computacionais, bem como o desenvolvimento de um instrumental estatístico cada vez mais sofisticado me levou a refletir acerca da eficiência de um modelo que surgiu em 1973. Estaria este modelo sucumbindo à modernidade das novas técnicas de análise e à sofisticação de nosso mercado financeiro? É possível que um modelo criado na década de 70 ainda apresente resultados confiáveis em nossa economia do final do século?, e mais: Existe algum outro modelo alternativo que produza melhores resultados?

Com certeza estas foram outras questões que me levaram à execução do presente trabalho, o qual certamente servirá para esclarecer de algum modo a eficiência do modelo B&S na precificação de opções no mercado financeiro brasileiro, mesmo quando comparado à outros modelos alternativos.

I.2-) Arcabouço Teórico

Todo o conhecimento teórico necessário para uma posterior análise dos modelos propostos será apresentado nos capítulos II e III deste trabalho. Procurei dedicar um capítulo inteiro à descrição do modelo de Black & Scholes uma vez que este é, na verdade, o objetivo central deste estudo. No capítulo III procurei fazer uma breve introdução à 2 modelos alternativos ao B&S para precificação de opções, o Modelo de Jumps e o Modelo de Difusão Deslocada. O motivo pelo qual resolvi incluí-los neste trabalho foi o de demonstrar algumas das maneiras pelas quais opções podem ser precificadas quando não se usa o modelo Black & Scholes. Tais modelos alternativos são pouco difundidos dentre aqueles que não são conhecedores profundos do assunto, logo, o presente trabalho seria uma maneira de fornecer uma visão geral, mesmo que introdutória, de alguns destes modelos. Gostaria apenas de ressaltar que, a escolha dos dois modelos alternativos foi determinada pela disponibilidade de material bibliográfico que se adaptasse ao objetivo do presente trabalho. Isto porque, apesar da vasta bibliografia consultada, poucos foram os textos acessíveis sobre o assunto de conteúdo matemático correspondente ao teor do curso de economia. Infelizmente, a maioria indicava a necessidade de conhecimentos específicos que se mostraram muito além dos objetivos de um trabalho de graduação.

Um terceiro modelo, o modelo Binomial, será posteriormente apresentado como um instrumento alternativo para um aperfeiçoamento do modelo Black & Scholes, de forma a se atingir precificações mais precisas.

I.3-) Construções Empíricas

O capítulo IV do presente trabalho objetiva testar a eficiência da utilização do modelo Black & Scholes dentro do mercado de capitais brasileiro, através de um instrumento proposto por Mark Rubinstein no artigo Implied Binomial Trees[2]: o teste Minimax.

Neste capítulo irei descrever e efetuar para o mercado de opções brasileiro, o mesmo teste efetuado por Rubinstein para o mercado de opções americano, com o intuito de mensurar a eficiência do modelo B&S para precificação de nossas opções, assim como o grau de ajuste das expectativas dos agentes do mercado brasileiro à este mesmo modelo.

I.4-) Dados Utilizados

Para que fosse possível a obtenção de resultados consistentes, optei por construir minha base de dados tomando por base as cotações de fechamento do ativo à vista TELEBRÁS PN bem como de suas opções, uma vez que tal ativo responde pela maioria absoluta da liquidez do mercado de opções brasileiro. Além disso, e como forma de estabelecer uma filtragem inicial dos dados de forma a evitar possíveis distorções de mercado, não utilizei cotações dos períodos que compreendiam a semana anterior ao vencimento de cada série (visando eliminar o efeito da pressão compradora/vendedora sobre o preço do papel à vista, que geralmente ocorre quando estamos perto do vencimento), nem cotações de opções de venda (dado que seu mercado não apresenta um grau de liquidez considerado satisfatório).

Para facilitar e dar maior credibilidade à construção dos modelos, irei neste trabalho utilizar a hipótese simplificadora de que as opções não sofrem os efeitos dos dividendos pagos ao ativo à vista[3].

Um outro artifício a ser utilizado para conferir uma maior homogeneidade às amostras de opções que serão precificadas no presente trabalho é a escolha de 3 tipos de opções para cada amostra: 1 opção in-the-money, 1 opção at-the-money e 1 opção out-of-the-money. Desta maneira conseguiremos estudar o comportamento/eficiência da precificação via Black & Scholes para todos os tipos de opções, e não para um grupo específico somente.

A base de dados levantada para a construção empírica deste estudo consiste em dados relativos aos anos de 1992, 1996 e 1997 (observada a relativa dificuldade/limitação de obter-se registros mais antigos) associados à:

- Taxa de juros livre de risco da economia (CDI Over - Fechamento Diário)

- Preço de fechamento diário do ativo TELEBRÁS PN (TEL 4)

- Preços de fechamento diário das opções de compra (CALLS) de TELEBRÁS PN para todos os vencimentos do período mencionado

Foram 4 as fontes consultadas para o fornecimento dos dados acima:

- Banco de Dados da empresa Reynolds-Latasa

- Banco de Dados do IBMEC

- Banco de Dados Financeiro - Economática

- Banco de Dados da Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA)

---

[2] Journal of Finance; nr.3: 770-817, Julho 1994

[3] O efeito normal de dividendos sobre o ativo à vista é a redução do preço de exercício da opção

Utilizando estes métodos, restrições e hipóteses procurei construir, dentro das limitações existentes, um conjunto de observações o mais confiáveis possível, de forma a tornar significantes as conclusões obtidas ao longo do presente estudo.

No entanto, é importante deixar claro que o objetivo deste trabalho não é fornecer os conceitos básicos do mercado de opções (os quais se supõe sejam de conhecimento do leitor), justificando assim a ausência de capítulos introdutórios relativos à tópicos básicos do tipo: o que é uma call, o que é uma opção in the money e etc...

I.5-) Conclusões

Os resultados finais deste trabalho mostrarão a importância da utilização do modelo "correto" para precificação de opções quando da tomada de decisões acerca das estratégias operacionais a serem traçadas.

A partir de testes empíricos, será possível observar a eficiência do modelo Black & Scholes no processo de precificação de opções para o mercado brasileiro.

No capítulo V procurarei expressar as principais conclusões obtidas neste trabalho, bem como fundamentar os dois resultados finais citados acima.

Por fim, gostaria de deixar registrado que a contribuição maior deste trabalho estará contida no capítulo IV, o qual apresentará um importante teste empírico da eficiência nas precificações do modelo de Black & Scholes dentro do mercado financeiro brasileiro.

CAPÍTULO II - O MODELO BLACK & SCHOLES

II.1) Introdução

"... *uma equação diferencial que deve ser satisfeita pelo preço de qualquer derivativo que esteja baseado em uma ação livre do pagamento de dividendos.*"[4]

No início dos anos 70, mais precisamente em 1973, surgia o primeiro modelo de precificação de opções européias[5] sem dividendos, derivado por Fischer Black e Myron Scholes "logo após o início das atividades da Chicago Board of Options Exchange - CBOE"[6]. Tal modelo, que ficou mundialmente conhecido pelo nome Black & Scholes, foi responsável por uma revolução no mercado de opções americano, e posteriormente no mundial, fazendo com que eles passassem a registrar volumes cada vez maiores de contratos negociados (aumentando cada vez mais sua liquidez), visto que a partir deste modelo os mercados passaram a ter parâmetros/instrumentos de sinalização do preço deste derivativo, o que até então não existia no meio financeiro americano e mundial.

Para tornar possível a descrição das hipóteses dos modelos, é preciso que se deixem claros os fatores determinantes do prêmio de uma opção (tanto de compra quanto de venda). São eles:

---

[4] Black, F. and Scholes, M.: Journal of Political Economy, Vol 81 - Maio/Junho 1973
[5] Opções que só podem ser exercidas na data do seu vencimento
[6] Bessada, Octavio M. (1994), 216

- Valor de mercado da Ação Objeto
- Preço de exercício da opção em questão
- Volatilidade (anualizada) da Ação Objeto
- Tempo restante até a data do exercício da opção (dias úteis)
- Taxa de juros livre de risco do mercado

Somente um modelo que leve em conta todas estas variáveis conseguirá oferecer resultados significantes. Este é o modelo Black & Scholes, a ser descrito a seguir.

Antes porém, cabe aqui uma passagem do livro Options and Financial Futures[7] na qual se lê: "um modelo só apresentará resultados válidos quando suas hipóteses forem as mais realísticas possíveis".

II.2-) Suposições e Pressupostos Básicos

Para derivar sua equação final, Black e Scholes utilizaram o conceito de portfolios neutros ao risco, onde posições opostas são tomadas em opções e em ações de forma a manter o portfolio neutro às oscilações do mercado (neste caso seu retorno seria exatamente igual à taxa de juros livre de risco, da economia), além de assumirem alguns pressupostos básicos acerca do comportamento das variáveis envolvidas no modelo, os quais serão discutidos a partir de agora. São eles:

a) O preço do ativo objeto possui um comportamento Lognormal (processo de Difusão) com μ (retorno esperado da ação por unidade de tempo) e σ (desvio padrão do retorno da ação durante a unidade de tempo) constantes.

---

[7] Dubofsky, D.A. (1993)

Este pressuposto diz respeito ao comportamento do preço do ativo objeto com relação ao tempo. Se supusermos que o preço de uma ação apresenta um movimento aleatório (não tendencioso), podemos dizer que num curto espaço de tempo o preço desta ação possui uma distribuição Normal, o que implica, necessariamente, em dizer que o preço desta mesma ação irá possuir em qualquer momento no futuro uma distribuição Lognormal (a qual difere da Normal por não poder possuir valores negativos e nem ser simétrica, o que fornece ao modelo um alto grau de realismo). Desta maneira o logaritmo normal dos preços relativos estarão distribuídos na forma normal. Logo, este comportamento de preços nos indica variações aleatórias, porém com uma tendência definida (os chamados *drifts*) que pode ser exemplificado através da equação[8]:

$$d\mathrm{S}_t/\mathrm{S}_t = \mu_t d_t + \sigma_t d_z ,$$

cujas variáveis que descrevem o retorno instantâneo do ativo objeto ($d\mathrm{S}_t/\mathrm{S}_t$) são a tendência[9] ($\mu_t$) e a volatilidade do preço do ativo[10] (σ_t). O Modelo de Black & Scholes, no entanto, assume que o valor da opção é independente do retorno esperado da ação uma vez obedecidas as hipóteses do modelo.

b) Não existem custos de transação nem impostos e os títulos são perfeitamente divisíveis.

c) As ações objeto não pagam dividendos.

d) Não existem oportunidades de arbitragem sem que exista risco.

e) A negociação dos ativos nos mercados é contínua.

---

[8] Equação esta que mais tarde será transformada pelo lema de Ito em uma função de S e t, que define o com portamento do preço do derivativo do ativo objeto S, para se chegar à equação diferencial desejada
[9] Retorno esperado da ação (média anualizada do retorno num curto período de tempo)
[10] Medida de incerteza quanto ao comportamento futuro no preço do ativo objeto

f) Qualquer investidor pode tomar emprestado ou emprestar à uma mesma taxa de juros livre de risco (r), que é constante no curto prazo.

À exceção do primeiro pressuposto, os demais me parecem um tanto auto explicativos, o que torna dispensável maiores comentários à respeito. Entretanto, é importante observar que o modelo B&S estará trabalhando sempre com base em um portfolio livre de risco em períodos muito curtos (infinitesimais) de tempo, uma vez que os preços da ação e da opção estão altamente correlacionados (o retorno do portfolio portanto é facilmente calculado) e que em nenhum momento as equações do modelo apresentam variáveis sensíveis ao grau de risco adotado pelos investidores.

II.3-) Fórmulas de Precificação

Com a descoberta da equação de Black & Scholes, foi deixada para trás a idéia de que só havia uma certeza quanto ao preço de uma opção: a de que seu valor seria dado pela fórmula C = Máx [0,S-K] (para as opções de compra) ou P = Máx [0,K-S] (para as opções de venda) nas suas datas de vencimento.

Uma vez estabelecidas todas as premissas do modelo, Black & Scholes terminaram por resolver sua equação diferencial, inicialmente proposta, derivando matematicamente fórmulas para os preços de opções de compra e venda (européias sem dividendos)[11]:

[11] a) Uma vez que uma call americana sem dividendos dificilmente é exercida antes do vencimento, esta fórmula (C) pode ser estendida também para opções de compra americanas

b) Através do conceito de Put-Call-Parity é possível se chegar à fórmula da put a partir da fórmula da call, basta que se faça: $c + Xe^{-r(T-t)} = p + S$

$$C = S * N(d1) - Xe^{-rt} * N(d2)$$

$$P = Xe^{-rt} * N(-d2) - S * N(-d1)$$

sendo que,

$$d1 = \frac{\ln(S/X)+(r + \sigma^2/2)*T}{\sigma T^{1/2}}$$

$$d2 = \frac{\ln(S/X)+(r - \sigma^2/2)*T}{\sigma T^{1/2}}$$

onde:

C é o preço da *Call*

P é o preço da *Put*

N(x) "é a função de probabilidade cumulativa de uma variável normal padronizada. Em outras palavras, é a probabilidade de que uma variável com padrão de distribuição normal seja menor que um valor x"[12]

S é o preço da ação objeto

Xe^{-rt} é o preço de exercício da opção trazido a valor presente

r é a taxa de juros livre de risco da economia

T é o tempo para o vencimento da opção expresso em número de dias úteis

σ é a volatilidade do preço da ação

$N(d1)$ representa o Delta do modelo (um parâmetro que será discutido posteriormente)

$N(d2)$ pode ser interpretado como a probabilidade de uma call terminar in-the-money no dia do seu exercício

[12] Hull, John C. (1995), 258

Ao olharmos as equações expressas acima, é de fácil percepção que a maioria das variáveis que as compõem são de obtenção imediata, ou seja, não demandam nenhum artifício matemático para cálculo. As cotações dos ativos podem ser obtidas através de sistemas especializados em divulgação *real time* de preços em Bolsas de Valores (Broadcast/Teledata ...) ou até mesmo em jornais, o preço de exercício das opções é sempre estabelecido quando de seu lançamento (logo é de conhecimento comum de todos os investidores), o tempo restante até a data do vencimento pode ser facilmente observado em calendários financeiros e a taxa de juros livre de risco pode ser obtida através da taxa de remuneração dos títulos no mercado aberto calculada e divulgada diariamente por várias instituições do mercado financeiro. A única variável que não é de observação imediata, e por isso requer instrumental para seu cálculo, é o grau de volatilidade[13] da taxa de retorno do ativo objeto a ser introduzido no modelo.

Pelo fato de não ser uma variável de comum conhecimento, é preciso se tomar cuidado ao escolher o método de estimação da volatilidade histórica de um ativo, afinal seu valor estará intimamente relacionado ao estimador utilizado no modelo de estimação. Logo, é preciso fazer uma análise prévia dos dados de forma a se utilizar o método adequado ao interesse de cada analista no que se refere principalmente ao número de observações utilizadas no cálculo e ao peso relativo que se pretende dar a observações mais recentes. A melhor aproximação para o cálculo da volatilidade vai depender muito do feeling do investidor no momento em que este analisar os dados em questão. A descrição dos diversos métodos para cálculo da volatilidade histórica de um ativo foge ao escopo deste trabalho, entretanto podem ser facilmente consultadas na maioria dos livros de estatística existentes no mercado, e em especial na monografia "Volatilidade: Importância e Utilidade no

[13] Medida de incerteza quanto ao comportamento futuro de um ativo calculada através do desvio padrão dos retornos diários deste ativo e anualizada multiplicando-se por $252^{1/2}$

Mercado Financeiro"[14] de autoria de Marcelo de Albuquerque Pinheiro, que desenvolve os principais métodos para cálculo da volatilidade histórica de ativos negociados em bolsa. Para simplesmente não fugir ao assunto, gostaria apenas de citar alguns dos principais modelos de estimação de volatilidades históricas descritos na monografia mencionada, são eles: Estimador Não Viesado de Mínima Variância Uniforme, Estimador de Máxima Verossimilhança, Estimador de Média Móvel Exponencialmente ponderada e Modelos ARCH.

Até agora, só fizemos menção ao conceito de Volatilidade histórica de um ativo, de forma a obtermos todas informações necessárias para o cálculo do "preço justo"[15] de uma opção com base nas equações do modelo B&S. Entretanto, existe um outro conceito fundamental de volatilidade, a chamada Volatilidade Implícita, que nada mais é do que a volatilidade atribuída pelo modelo B&S à opção, quando ao invés de inputarmos no modelo a volatilidade histórica inputamos o preço de mercado da opção. Esta volatilidade nos dará, naquele momento[16], a idéia das expectativas dos agentes participantes do mercado quanto ao comportamento da opção até a data do seu vencimento e da volatilidade da ação objeto.

O conceito de volatilidade implícita fornecido pelo modelo B&S, é atualmente o conceito mais utilizado no mercado financeiro mundial na medida em que ele fornece subsídios para avaliações de opções super e subavaliadas. O mecanismo é relativamente simples: com base no preço de mercado de uma call e no restante das variáveis necessárias, calcula-se através do modelo B&S a volatilidade implícita àquela opção, feito isso basta se comparar esta volatilidade com a volatilidade histórica do ativo objeto.

---

[14] Departamento de Economia da PUC-RJ (Dezembro/1995)

[15] Preço ao qual a opção deveria estar sendo negociada no mercado com base nos dados inputados no modelo.

[16] É importante notar que a volatilidade implícita está constantemente variando de acordo com a alteração das variáveis do modelo., o que indica um componente dinâmico de mercado.

Quando a volatilidade implícita é menor do que a histórica, isto indica que o mercado está subavaliando a opção em questão, por outro lado quando a volatilidade implícita é maior do que a histórica, isto indica que o mercado está superavaliando a opção em questão (notar a importância do cálculo preciso da volatilidade histórica).

Isto posto, é preciso que se deixe claro que a otimização do modelo B&S vai depender da sensibilidade do investidor na hora de estimar a volatilidade que será introduzida na equação de modo a se chegar a um preço justo eficiente.

II.4-) Parâmetros fornecidos pelo Modelo

Além de precificar opções, os parâmetros do modelo B&S são também largamente utilizados para fins de Hedge[17]. Isto porque eles proporcionam resultados muito mais eficazes que estratégias de hedge mais simples (hedge de teto por exemplo), protegendo uma carteira contra oscilações, não só bruscas como também suaves, do preço do ativo objeto, da volatilidade da opção e etc... Apresento a seguir os conceitos dos principais parâmetros fornecidos pelo modelo Black & Scholes[18]:

- **DELTA**

Chamamos de Delta de uma opção à taxa de variação do preço da opção com relação ao preço do ativo objeto. Graficamente poderíamos imaginar o Delta como sendo a inclinação da curva que relaciona os preços da ação e da opção.

[17] Proteção contra riscos de mercado

[18] Uma análise mais profunda relativa a mecânica operacional (a qual foge ao objetivo deste estudo) pode ser obtida no livro Option as a Strategy of Investment

Sua fórmula pode ser expressa da seguinte forma:

$$\Delta = \Delta C / \Delta S$$

onde C = Call e S = Preço do ativo objeto

Utilizando este parâmetro, muitos operadores protegem suas carteiras contra as oscilações no preço das ações objeto através de operações Delta-Hedge. No entanto tais posições precisam constantemente serem balanceadas, uma vez que tal hedge somente funciona por um curto período de tempo, dadas as constantes oscilações do mercado e consequentemente do Delta da opção. Seria um tipo de hedge dinâmico.

- **TETA**

O Teta de uma opção pode ser definido como a taxa de variação do preço da opção ao longo do tempo para o vencimento, com as demais variáveis permanecendo alteradas. No vocabulário do mercado financeiro, é simplesmente conhecido com a perda de valor no tempo da opção.

Pode ser calculado através da seguinte fórmula:

$$\Theta = \frac{-(SN'(d1)\sigma)}{2\ (2\pi)^{1/2}} - rXe^{-rt}\ N(d2)$$

onde $N'(x) = 1/(2\ (2\pi)^{1/2}) * e^{-(x^{\wedge}2)/2}$, e os demais parâmetros já foram anteriormente definidos.

A idéia aqui é a de que, quanto mais perto do dia de vencimento, mais a opção tende a desvalorizar-se (chegando a zero para opções out-of-the-money). Daí o sinal do Teta ser quase sempre negativo.

- **VEGA**

O vega de uma opção indica a taxa de variação do prêmio da opção com relação à volatilidade do ativo à vista, em outras palavras, indica o grau de sensibilidade do prêmio da opção à volatilidade do ativo objeto. Sua expressão é a seguinte:

$$\Lambda = S\ T^{1/2}\ N'(d1)$$

Operações Vega-neutras procuram neutralizar os efeitos das oscilações na volatilidade do ativo objeto sobre as opções em carteira.

- **GAMA**

O Gama de uma opção reflete a taxa de variação do delta da mesma com relação ao preço do ativo à vista. Isto mostra que o gama, na verdade, pode ser utilizado como um indicador da frequência com a qual é preciso se balancear posições delta hedgeadas. Quanto maior o Gama, mais sensível será o Delta à oscilações do preço à vista e consequentemente maior será a frequência ótima para balanceamento das posições. Sua fórmula é a seguinte:

$$\Gamma = N'(d1)/(S\sigma T^{1/2})$$

Operações Gama-neutras procurarão diminuir o efeito sofrido nos intervalos de balanceamento de operações delta hedge, provocados por oscilações no preço do ativo à vista

- **RÔ**

O Rô de uma opção irá indicar a taxa de variação do prêmio da opção com relação à variações na taxa de juros. É expresso pela seguinte equação:

$$\text{Rô} = XTe^{-rt}\,N(d2)$$

Dentre todos os parâmetros abordados, este é o que apresenta menor frequência de uso pelos profissionais no mercado financeiro brasileiro.

II.5-) Conclusão

O modelo de Black & Scholes é, sem dúvida alguma, um marco na história do mercado financeiro mundial, e especialmente no mercado de opções. Através dele foi possível precificar opções com base em premissas bastante coerentes com o funcionamento do mercado financeiro, de uma forma rápida, simples, segura e sem maiores custos. A difusão deste modelo entre os profissionais dos mais diversos países, trouxe um grau ainda maior de credibilidade à questão da precificação, dado que todos passaram, inicialmente, a dispor de uma ferramenta de uso comum a todos.

O único cuidado que há de se ter ao precificar uma opção através deste modelo, é a precisão da estimativa de volatilidade histórica do ativo objeto, uma vez que as demais variáveis não requerem instrumentais específicos de cálculo. Estimativas inconsistentes de volatilidade histórica implicarão em precificações inconsistentes.

Em suma, o capítulo visou a descrição do modelo B&S[19] e suas premissas fundamentais, de forma a proporcionar ao leitor o conhecimento necessário para efeito de posteriores conclusões acerca dos testes que serão efetuados no capítulo IV deste trabalho

Questões relativas à desvantagens (pontos fracos) e vantagens do modelo serão discutidas posteriormente nos capítulos IV e V deste trabalho.

[19] Este trabalho enfatizou os fundamentos do modelo, uma vez que sua demonstração matemática pode ser encontrada na obra "Options Markets" Cox, J. and Rubinstein, M (1985) ou no livro "Options, Futures and other Derivative Securities" Hull, John (1989)

CAPÍTULO III - INTRODUÇÃO À ALGUNS DOS MODELOS ALTERNATIVOS EXISTENTES PARA PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

III.1) Introdução

Apesar de largamente utilizado no mercado financeiro mundial, é possível se observar que o modelo B&S nem sempre é capaz de precificar uma opção de forma 100% perfeita[20]. De tal forma que, a percepção deste diferencial de preços modelo-mercado acabou por motivar estudos e trabalhos no sentido de se entender o porquê destes *gaps*. A maioria destes trabalhos consiste no aperfeiçoamento do modelo inicialmente proposto por Black & Scholes e, consequentemente, na criação de um novo modelo com base nestas novas premissas, as quais seriam supostamente mais realísticas.

Muitos foram os modelos alternativos propostos, dentre eles os modelos de "Jump" Puro, de Difusão com Variância de Elasticidade Constante, de Difusão Composta, de Difusão Deslocada, de Volatilidade Estocástica, o modelo misto "Jump-Diffusion" e os implementos Binomiais.

Para não deixar uma lacuna em meu trabalho, e visando demonstrar, de fato, a existência de alternativas ao modelo

[20] Isso aconteceria caso o preço B&S fosse igual ao prêmio da opção observado no mercado

tradicional de B&S, pretendo introduzir os conceitos básicos de dois dos modelos alternativos existentes para precificação de opções. São eles:

- Modelo de Difusão Deslocada

- Modelo de Jumps

Dito isto, resta apenas ressaltar que o objetivo do presente capítulo, assim como de todo o trabalho, não é a derivação matemática dos modelo propostos. Uma vez que tais derivações se encontram à disposição do leitor nos diversos livros que compõem a bibliografia final de meu trabalho[21], me preocupei fundamentalmente com os conceitos e as idéias de cada modelo, bem como com a análise de cada estrutura de precificação proposta, dedicando um maior tempo para a análise dos resultados empíricos do capítulo IV, a qual será a contribuição maior deste trabalho.

III.2) Modelo de Difusão Deslocada

Proposto por Mark Rubinstein em 1983 em seu artigo "Displaced Diffusion Option Pricing", este modelo enfatiza o conceito de risco (consequentemente volatilidade e retorno) associado a cada ativo possuído por uma firma.

Sua suposição inicial consiste na análise de uma firma que possui apenas dois ativos, um ativo de risco e um ativo livre de risco. Recordando o modelo B&S, aqui o ativo de risco irá possuir uma volatilidade instantânea constante σ_r (comportamento lognormal) enquanto o outro ativo apresentará um retorno livre de risco r. Além disso, o autor também sugere que a estrutura de capital desta firma seja relativamente simples, medindo sua relação

[21] Observar que na descrição de cada modelo estará presente a referência bibliográfica para consulta das derivações matemáticas

ativo passivo (β) em termos do valor corrente de mercado de suas ações.

Levando-se em conta que uma proporção α[22] do valor da firma é investido no ativo de risco e, consequentemente, $(1-\alpha)$ no ativo livre de risco, é possível se escrever uma equação que determine o valor da firma num dado momento no futuro:

$$[\alpha e^{y} + (1-\alpha)r^{t}]V ,$$

onde e^{y} é o retorno do ativo de risco, y uma variável aleatória de distribuição normal e volatilidade$\sigma_r t^{1/2}$ e V o valor atual da firma

E, consequentemente, uma equação para o valor de mercado das ações da firma num instante futuro t:

$$S' = [\alpha e^{y} + (1-\alpha)r^{t}](1+\beta)S - S\beta\ r^{t}$$

Com base nesta equação, e agregando a ela uma equação capaz de refletir a política de dividendos da firma, o prof. Rubinstein desenvolveu uma nova fórmula para precificação de opções[23], a qual carrega em si um novo componente relativo aos dividendos:

$$C = aS\,N(x) - (K-bS)r^{-t}\,N(x-\sigma_r t^{1/2})$$

onde,

$$x = (\log(aS/(K-bS)r^{-t}))/\sigma_r t^{1/2} + (\sigma_r t^{1/2})/2$$

$$a = \alpha(1+\beta)\Pi_{k\leq t}\,(1-\delta_k)$$

$$b = (1-\alpha-\alpha\beta)r^{t} - \Sigma_{k\leq t} d_k r^{t-k}$$

Olhando para esta equação, nota-se de antemão que ela representa um caso mais genérico da fórmula de Black & Scholes, bastando para isso que se faça a = b = 0; os modelos ficarão

---

[22] Onde $0 \leq \alpha \geq 1$

idênticos. Além disso, por ser um modelo mais genérico, o modelo de difusão deslocada leva em conta também a distribuição de dividendos sobre o ativo objeto das opções, o que não acontecia no modelo B&S, o qual só aceitava valores pontuais sobre os parâmetros de sua fórmula. A introdução deste componente, portanto, torna o modelo mais realístico e compatível com os movimentos de mercado.

Uma outra vantagem do novo modelo é a introdução de um processo de decomposição dos ativos da firma em questão, o que de certa forma implica em uma volatilidade estocástica do valor da firma, uma vez que este é composto por um ativo de risco e outro livre de risco. Logo, com a volatilidade do ativo de risco sendo constante, qualquer alteração abrupta no valor do ativo de risco será transmitida para o valor da firma e consequentemente repassada para a volatilidade desta.

Por outro lado, "ao se comparar este modelo com o de Black & Scholes, nota-se que tais vantagens não são obtidas sem alguns custos..."[24]. Tais custos (causados pelas hipóteses do modelo) podem ser expressos pelas dificuldades em se estimar, de forma ótima, a proporção do valor da firma representada pelo ativo de risco e a volatilidade deste ativo. Além disso, não podemos dizer que todas as firmas apresentam apenas dois ativos bem definidos, um de risco e um livre de risco. É preciso que se observe, e se leve em conta, o grau de risco que de fato está associado aos ativos da firma e que se elimine a restrição de que apenas um ativo de risco pode ser mantido em carteira[25].

Por fim, é preciso que se identifique o efeito de tais vantagens e custos quando comparados ao tradicional modelo B&S. Para isso basta que observemos a tabela I deste trabalho (ao final

[23] Sua derivação completa pode ser encontrada em "Displaced Diffusion Option Pricing"; Journal of Finance, Vol 38, Março 1983 pag. 213-217

[24] Rubistein, Mark. "Displaced Diffusion Option Pricing" Journal of Finance, Vol 38 (1983) pág. 217

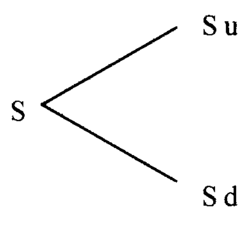
do mesmo), a qual nos apresenta uma comparação entre os dois modelos para opções de compra européias. Por ela observamos que opções in-the-money são subestimadas pelo modelo alternativo enquanto opções out-of-the-money são superestimadas pelo mesmo modelo.

O fato é que as precificações da tabela se revelam muito parecidas, o que indica que ambos os modelos tendem, de certa forma, a apresentar o mesmo resultado.

III.3) Modelo de Jumps

Uma das mais importantes alternativas à suposição do comportamento lognormal (do ativo objeto) de Black & Scholes, foi introduzida por Merton, R.C. em 1976. Em seu artigo, o autor se refere ao conceito de Jumps como uma nova hipótese de comportamento do ativo a ser analisado.

Ao contrário dos outros modelos contidos neste trabalho, o modelo de Jumps não admite que o preço do ativo objeto (a ação) varie de uma maneira contínua através de um comportamento lognormal. Ele assume que o preço de um ativo irá variar, em cada intervalo de tempo, da seguinte forma:



Isto significa a adoção de um comportamento específico do ativo objeto, a ação, em cada período t no tempo:

[25] Isto acarretaria num instrumental matemático muito mais complexo e com um maior número de parâmetros a serem estimados

"A cada período discreto, o preço da ação poderá variar o mínimo possível, na direção positiva ou negativa."[26]

Nesta seção optei por analisar o modelo de Jumps para precificação de opções em tempo discreto proposto por Kaushik Amin[27], uma vez que este pode convergir para o tempo contínuo quando adotamos algumas hipóteses específicas, a serem apresentadas posteriormente.

As principais hipóteses básicas sob as quais o modelo proposto por Amin foi construído são as seguintes:

a) Os negócios ocorrem somente em datas discretas (0,1,2,3 ...,T)

b) Apenas dois ativos são negociados nesta economia:

- Um ativo que apresenta um retorno livre de risco

- Um ativo de risco (uma ação), cujo valor é determinado exógenamente seguindo um comportamento discreto

c) O comportamento deste ativo de risco ganha a forma de ínfimos saltos, exatamente de acordo com o gráfico apresentado na página anterior (ele pode a cada período no tempo apresentar oscilações/saltos de alta ou de baixa). Entretanto, é preciso se ressaltar a possibilidade da ocorrência de fatos exógenos extraordinários ("rare events") que impliquem em Jumps de maior magnitude (a amplitude do salto seria bem maior como resposta aos estímulos externos), uma vez que estes *rare events* impossibilitam a utilização do mecanismo de portfolio neutro ao risco em nossas análises (não é possível garantir que o portfolio nesta situação é neutro ao risco). Neste caso o investidor não poderia fazer corretamente sua estratégia de Hedge.

---

[26] Amin, Kaushik. I.: "Jump Diffusion Option Valuation in Discrete Time" Journal of Finance, Vol 5 (1993), pág. 1834

[27] Amin, Kaushik. I.: "Jump Diffusion Option Valuation in Discrete Time" Journal of Finance, Vol 5 (1993)

d) Os dois possíveis movimentos de preços são mutuamente exclusivos

e) Não existe a possibilidade de arbitragem entre mercados

f) Os mercados operam de forma eficiente

Tomando por base uma metodologia análoga à adotada por Black & Scholes, consideremos um portfolio composto por 1 opção , N ações e um montante B aplicado em renda fixa (cujo retorno é a taxa de juros livre de risco). No instante (i) inicial, e supondo que não houve à priori nenhum investimento, o valor do portfolio pode ser dado pela seguinte relação:

$$V(i) = NS(i) + B + C(i)$$

Suponhamos agora que o investidor queira eliminar o risco a que o seu portfolio está sujeito devido a variações no preço da ação. Como se trata de uma operação de renda fixa, o investidor quer saber no momento i o rendimento que seu portfolio apresentará no momento i+1. Para que isto ocorra é preciso que o valor do portfolio seja o mesmo, qualquer que seja o movimento do ativo de risco. Logo:

$$V_{\pm 1}(i+1) = N[S_{+1}(i+1)+DS(i)] + rB + C_{+1}(i+1)$$

$$= N[S_{-1}(i+1)+DS(i)] + rB + C_{-1}(i+1)$$

Resolvendo para N:

$$N = -\{[\ C_{+1}(i+1) - C_{-1}(i+1)]/\ [S_{+1}(i+1) - S_{-1}(i+1)]\}$$

onde N é a razão de hedge do portfolio caso o investidor queira se manter protegido das oscilações do mercado acionário.

O retorno do ativo de risco no momento i+1, por sua vez, pode ser representado pela seguinte equação:

$$\Delta_K = S_{+K}(i+1)/S(i)$$

onde K pode apresentar valores negativos (preço da ação caiu) ou positivos (preço da ação subiu), com base no preço da ação no momento imediatamente anterior.

Esta última relação juntamente com as equações anteriores, nos permite criar uma expressão[28] para o retorno do portfolio, como um todo, no momento i+1[29]:

$$V_{\pm 1}(i+1) = pC_{+1}(i+1) + (1-p)C_{-1}(i+1) - rC(i)$$

onde $p = [(r-D) - \Delta_{-1}]/[\Delta_{+1}-\Delta_{-1}]$, indica a probabilidade risco-neutra de uma oscilação de alta do ativo de risco

Para casos onde são observadas ocorrências de *rare events*, a expressão obtida é a seguinte:

$$Vy(i+1) = -[(C_{+1}(i+1) - C_{-1}(i+1))/(\Delta_{+1}-\Delta_{-1})]*[Y-(r-D)]+C_{y}(i+1)-rC(i)$$

onde Y = retorno da ação quando um evento raro ocorre

y = período para o qual foi transferido o modelo após este salto mais longo proporcionado pelo evento raro

Um evento raro implica em $y \neq \pm 1$.

Dado que a existência de eventos raros impossibilita a utilização de raciocínios baseados no conceito de portfolios neutros ao risco, é preciso que adotemos alguma hipótese adicional à hipótese da ausência de arbitragem entre mercados, afinal esta já não garante que o portfolio inicial possui valor zero.

Assume-se então, de acordo com Merton, que o risco associado aos Jumps/eventos raros é diversificado. Logo, o portfolio por nós construído irá apresentar apenas este tipo de risco. Com isto, a expectativa do valor do portfolio em períodos

[28] Ver Amin, Kaushik I. pp 1838 (derivação algébrica da equação)
[29] Equação válida somente na ausência de rare events.

seguintes, com relação à distribuição do evento raro deve ser zero. Esta hipótese irá permitir a construção de uma regra para precificação das opções.

Com base na probabilidade de ocorrência de eventos raros, no valor do portfolio no momento i+1 (dada a ocorrência de um evento raro), no conceito de portfolio risco-neutro e na utilização de instrumentos que simplifiquem o processo de precificação[30], podemos definir uma equação para a precificação de uma Call no período i:

$$C(i) = \text{Máx}\ [\ F(i)\ ,\ E_{Q(i)}(C(i+1))/r\ ]$$

onde $F(i)$ = retorno se a opção for exercida hoje (i)

$E_{Q(i)}(.)$ = valor esperado de (.) dada a distribuição do preço da ação no próximo período

Uma vez estabelecida a equação, é preciso que a utilizemos de maneira recursiva para que possamos construir um modelo que precifique a opção a cada momento no tempo.

Uma vez que estabelecemos o modelo com base em um processo discreto do comportamento do preço do ativo objeto (a ação), é possível fazê-lo convergir para o modelo de jumps em tempo contínuo proposto por Merton em 1976. Entretanto esta convergência só é garantida após a definição do correto processo de tempo contínuo (incorporando o conceito de neutralidade ao risco) e das probabilidades de transição do modelo.

Desta forma, a transição para o modelo de tempo contínuo só será garantida quando:

[30] Uma medida simplificadora utilizada foi o valor presente do preço da opção descontado pela taxa de juros livre de risco. É a chamada medida risco neutra ou medida Martingale. Sob esta hipótese, o retorno esperado de qualquer ativo pode ser representado pela taxa de juros livre de risco. Esta medida é de extrema importância para a derivação deste modelo uma vez que ela é condição necessária e suficiente para que o modelo seja livre de arbitragens.

a) A probabilidade de acontecimento de eventos raros no tempo discreto, bem como a distribuição do comportamento dos preços relativos fruto de um jump, forem independentes do momento no tempo ("current state") em que se encontram.

b) A variância do termo de difusão é uma proporção constante do preço atual da ação, o que garante que na ausência de jumps o preço da ação irá apresentar um comportamento lognormal com uma variância proporcionalmente constante.

c) Após algumas simplificações algébricas, a probabilidade de saltos no modelo discreto for igual a ½ para um n suficientemente grande.

Com isto podemos dizer que o modelo de Jumps em tempo discreto converge para o modelo de Jumps em tempo contínuo. Apenas a título de enriquecimento do trabalho, gostaria de ressaltar as hipóteses básicas adotadas pelo modelo de Jumps inicialmente proposto por Merton:

a) O preço da ação apresenta saltos superpostos por movimentos geométricos Brownianos[31]

b) O logaritmo da intensidade do jump possui distribuição normal

c) O componente do salto associado ao retorno da ação apresenta um risco não sistemático (não precificado pela economia)

Neste contexto o preço da call pode ser expresso pela seguinte fórmula:

$$C = \sum [(e^{-\lambda'\tau}(\lambda'\tau)^{n})/n!]\, f_{n}$$

onde $\sum$ vai de zero a infinito

$\tau = T - t$

$\lambda' = \lambda(1+K)$

f_n = preço Black & Scholes da opção quando a variância instantânea é igual a:

$\sigma^2 + n\delta^2/\tau$ (sendo δ o desvio padrão da distribuição normal)

e a taxa de juros livre de risco é igual a:

$r - \lambda K + n\gamma/\ \tau$ (sendo $\gamma = \ln(1+K)$

A conclusão a qual se pode chegar a partir do desenvolvimento do presente modelo é que, baseado na teoria da convergência de Kushner e Dimasi de 1978, é possível se garantir que a precificação das opções pelo modelo de tempo discreto converge para os seus respectivos valores no tempo contínuo. Isto implica que o valor das opções no modelo de tempo discreto pode ser usado para uma estimação de seu valor no modelo de tempo contínuo, quando utilizamos intervalos de tempo muito pequenos.

III.4) Conclusão

O objetivo deste capítulo foi introduzir algumas das principais idéias que se encontram por detrás dos modelos alternativos de precificação de opções. Muitos são os modelos alternativos existentes, muitas são as críticas e elogios à estes modelos. Entretanto, pelo menos até o presente momento, nenhum destes modelos conseguiu aliar com tanta eficácia os três requisitos

---

[31] Movimentos puramente aleatórios, com tal aleatoridade sendo capturada por uma distribuição normal. Tal movimento satisfaz duas suposições básicas: Retornos de um ativo seguem uma distribuição normal e Mudanças em seus preços são independentes umas das outras

básicos: eficiência, custo e praticidade, como o modelo Black & Scholes.

Além disso, muitos dos modelos alternativos partem de premissas estabelecidas pelo próprio modelo B&S para atingir seus objetivos, o que só vem a confirmar a importância desta ferramenta inventada em 1973 para a história do mercado de opções mundial.

CAPÍTULO IV - TESTANDO O MODELO BLACK & SCHOLES

IV.1) Introdução

O propósito fundamental deste capítulo é testar a eficiência do modelo Black & Scholes no processo de precificação das calls negociadas no mercado acionário brasileiro.

A importância de uma correta precificação, e consequentemente do teste a ser executado no presente capítulo, reside no simples fato de que todo e qualquer tipo de ***preço*** carrega em si algumas das informações necessárias, e mais importantes, para que os agentes econômicos e financeiros fundamentem suas decisões e estratégias. Entretanto, para que estes mesmos agentes possam efetuar/traçar estratégias ótimas, é preciso que exista algum modelo que lhes forneça, da maneira mais precisa possível, uma estimativa confiável deste preço.

Em se tratando do mercado de opções, para que os agentes tomem suas decisões é preciso que exista um modelo que precifique o seu objeto de negociação (as opções) de uma maneira rápida, de baixo custo e com base em variáveis de fácil e precisa inferência. Este, como já visto nos capítulos anteriores, é o modelo de Black & Scholes.

Uma vez que o mercado acionário é, sem dúvida alguma, um dos mercados mais eficientes existentes hoje em dia, podemos afirmar que, teóricamente, o modelo B&S produz estimativas ótimas do preço de uma opção. Mesmo assim, após algumas observações empíricas relativas ao mercado de opções americano, o prof. Rubinstein[32] conseguiu detectar, através de complexos instrumentos estatísticos, uma certa defasagem, estatisticamente significante, em sua precificação a partir do crash da Bolsa de Nova York em 1987. Para ele, o modelo B&S estava se tornando cada vez menos confiável, e suas estimativas estavam levando os investidores a adotarem estratégias imprecisas:

"... os ***economistas que extraem informações probabilísticas dos preços das opções foram punidos*** ..."

O fato é que, apesar de conseguir provar que durante certos períodos no tempo (entre 1976 e 1978) alguns modelos alternativos obtiveram uma melhor performance no processo de precificação, em nenhum momento foi possível se provar que os resultados do modelo B&S eram economicamente inconsistentes. Apesar de apresentarem viéses estatisticamente significantes, estes mesmos eram economicamente insignificantes. Se fossemos comparar o modelo B&S com seus alternativos, na média seu desempenho seria infinitamente superior.

A questão passou a ser: Como construir um teste que consiga medir o grau de significância **econômica** do componente de erro (viés) do modelo B&S? A resposta para esta questão foi obtida através da construção de estatísticas Minimax, a qual será descrita na próxima seção.

Utilizando este método, Rubinstein conseguiu demonstrar que, efetivamente o modelo B&S estava fornecendo resultados

[32] Journal of Finance: "Implied Binomial Trees";3:770-817, Julho 1994

economicamente imprecisos para o mercado americano a partir de 1987 (em diante).

Tendo em vista esta conclusão, pretendo com base neste mesmo teste, comprovar, empiricamente, a não existência de viéses economicamente significantes do modelo B&S para o mercado de opções brasileiro em períodos **recentes** (uma vez que o mercado de opções no Brasil não apresenta uma liquidez satisfatória em períodos anteriores, relativamente mais amplos). Desta forma poderemos concluir ao final do presente capítulo o grau atual de ajuste do mercado de capitais brasileiro ao modelo B&S, bem como o grau de eficiência deste modelo para precificação de nossas opções.

IV.2) O Teste "*Minimax*"

"A idéia que existe por trás da estatística Minimax é a de estabelecer um limite inferior à performance da fórmula sem que seja preciso se estimar volatilidade, seja ela histórica ou implícita."[33]

Como já mencionado na introdução deste capítulo, a construção da estatística Minimax surgiu da necessidade de se medir a relevância econômica dos viéses do modelo Black & Scholes. Só assim, seria possível se precisar quando viéses estatisticamente significantes são de fato irrelevantes do ponto de vista econômico do mercado. Sob esta ótica, a medida estatística estaria induzindo os investidores ao erro uma vez que os componentes do mercado estaria tomando suas decisões com base em horizontes e argumentos econômicos.

Uma vez introduzida a necessidade e o objetivo do teste proposto, passo a descrever a mecânica operacional do mesmo.

A construção da estatística Minimax de Rubinstein segue alguns passos essenciais, que podem ser executados de maneira relativamente simples caso se possua as informações adequadas. Apresento a seguir, passo a passo, a construção da estatística Minimax:

Passo 1: Selecionar duas opções do mesmo ativo objeto, com mesma data de vencimento porém de diferentes preços de exercício. Aqui, sempre trabalharemos com pares de opções[34]

Passo 2: Para uma dada volatilidade calcular a diferença absoluta (módulo) entre o preço dado pelo modelo B&S e o preço de mercado para cada opção em questão. Esta diferença é também chamada de "Dollar Error".

Passo 3: Dentre as duas diferenças encontradas, selecione a maior.

Passo 4: Repita este procedimento alternando em cada momento o valor assumido para a volatilidade. Faça com que ela assuma (se possível) um grande número de valores entre zero e infinito. O resultado será uma tabela que irá associar para cada volatilidade um valor máximo de "Dollar Error".

Passo 5: A estatística Minimax será dada pelo menor valor atribuído à série que comporta todos os máximos "Dollar Errors" (daí o nome MiniMax).

A magnitude da volatilidade associada à esta estatística Minimax, estará sempre compreendida entre as volatilidades implícitas das duas opções em estudo, uma vez que a fórmula de Black & Sholes é monotônica crescente com relação à volatilidade.

[33] Journal of Finance: "Implied Binomial Trees";3:773, Julho 1994
[34] Os pares de opções por mim utilizados são de três tipos: In the Money/At the Money, In the Money/Out of the Money e At the Money/Out of the Money

Além disso, e pelo mesmo motivo, esta mesma volatilidade será a que vai igualar o valor do "Dollar Error" de cada opção.

Para evitar distorções advindas do fato que ações com preços mais altos irão gerar maiores "Dollar Errors", Rubinstein ainda sugere que efetuemos uma espécie de correção através da qual a estatística Minimax é transformada para base 100 através de um simples procedimento: multiplica-se a estatística por 100 e divide-se pelo preço do ativo objeto (a ação).

Uma vez estabelecido o valor do "Minimax Dollar Error", é preciso que observemos a relação entre a volatilidade implícita e o preço de exercício de cada par de opções analisados. Sempre que, no par de opções escolhido, a opção de maior preço de exercício apresentar a menor volatilidade implícita, é preciso que se adicione um sinal negativo ao "Minimax Dollar Error".

No meu ponto de vista, como valores absolutos, na maioria das vezes, não são indicados para fins de análises mais específicas, optei por trabalhar com outra unidade para avaliação de performance do modelo proposta por Rubinstein, são os chamados "Minimax Percentage Errors", os quais nada mais são do que a relação entre o Dollar Error e o respectivo preço de mercado de sua opção.

Uma ordem de 2% à 3% foi sugerida pelo prof. Rubinstein como suficientemente baixa e aceitável para os valores dos "Minimax Percentage Errors". Ao atuar neste *range* o modelo Black & Scholes estaria oferecendo um alto grau de eficiência no processo de precificação das opções negociadas em bolsa.

O teste acima descrito foi apenas um, dos diversos testes propostos por Rubinstein com o intuito de comprovar a deterioração do modelo B&S. E é esta mesma mecânica operacional que pretendo adotar, de modo a testar o modelo dentro do mercado de opções brasileiro.

Porém, antes de entrar no teste "brasileiro" propriamente dito, gostaria de tecer alguns comentários sobre duas tabelas (tabelas 2 e 3) relativas à precificação de opções através do modelo B&S para o mercado americano (encontradas ao final do trabalho) extraídas do artigo "Implied Binomial Trees" anteriormente citado, as quais nos fornecem um idéia clara quanto ao uso desta estatística Minimax com o propósito de indicar o momento da deterioração do modelo.

Olhando para as referidas tabelas, pode-se observar que o modelo B&S apresentou uma performance altamente satisfatória durante o ano de 1986, o qual apresentou um Minimax Percentage Error (MPE) nunca superior a 1%.

O ano de 1987, entretanto, representa o começo de uma deterioração na performance do modelo B&S com os MPE praticamente duplicando seu valor em relação ao ano anterior. De 1988 até 1992, o que se vê é um crescimento constante do percentual de erro do modelo, associado à uma crescente deterioração do mesmo. Rubinstein enfatiza a possibilidade do Crash da Bolsa de Nova York em outubro de 1987 ter gerado uma mudança na maneira com a qual os participantes do mercado de opções traçavam suas expectativas.

Para comprovar a suposta deterioração do modelo sugerida pela estatística Minimax, Rubinstein recorre a algumas análises gráficas. Os gráficos 1 e 2, apresentados ao final do presente trabalho, compreendem dois períodos distintos: o gráfico 1 apresenta dados anteriores ao crash da bolsa em 1987 enquanto o gráfico 2 apresenta dados posteriores ao mesmo crash. As variáveis que definem ambos os gráficos são duas: Volatilidade Implícita e Preços de Exercício de Opções (do índice americano S&P 500) com mesma data de vencimento. É de comum conhecimento que, o modelo Black & Scholes trabalha com a hipótese de que opções com mesma data de vencimento e diferentes preços de exercício, apresentam a mesma volatilidade implícita (hipótese de volatilidade constante). Isto implicaria num gráfico cuja forma se assemelhasse a uma linha horizontal. Porém, com base nestes dois gráficos é possível observar que o comportamento das volatilidades implícitas analisadas só segue o comportamento proposto por B&S no período anterior ao crash. O gráfico 1, construído no dia 01/07/87 com base nas volatilidades implícitas de diversas séries de opções do índice S&P 500 com mesma data de vencimento, representa uma situação onde as volatilidades são aproximadamente iguais, o que pode ser comprovado através da linha quase horizontal que o gráfico apresenta. Por outro lado, o período que se segue ao crash apresenta um formato peculiar de gráfico denominado "Smile". O "Smile" é caracterizado por uma situação onde o gráfico construído se apresenta de alguma forma afastado da linha horizontal proposta por Black & Scholes a partir da hipótese de volatilidades implícitas constantes. Tal formato de gráfico é originado pela forte diferença entre as volatilidades implícitas das distintas séries de opções com mesma data de vencimento, o que implica dizer que a hipótese do modelo B&S não está sendo respeitada. O Gráfico 2 (construído no dia 02/01/90, novamente com base nas volatilidades implícitas de diversas séries de opções do índice S&P 500 com mesma data de vencimento), comprova a hipótese de Rubinstein acerca da deterioração do modelo B&S. O Gráfico apresenta uma forte discrepância entre as volatilidades implícitas das opções com mesma data de vencimento, indicando uma distorção no ajuste do modelo B&S ao mercado americano naquele momento. O que se vê neste gráfico é que as calls que estavam in the money antes do crash, agora passaram a ser **super**avaliadas pelo modelo uma vez que suas volatilidades implícitas se mostravam muito mais altas que as volatilidades das opções at e out of the money. A situação pós crash representou um momento onde as volatilidades implícitas das opções triplicaram quando não quadruplicaram. O fato é que após o choque, o índice (ativo objeto das opções do gráfico) apresentou uma queda de 20% culminando em uma disparada das volatilidades implícitas das opções in the money. Opções at e out of the money acabaram por sofrer o efeito da "crash-o-fobia" uma vez que a saída em massa de opções de strike prices mais altos acarretou uma queda em seus níveis de volatilidade implícita. O mercado passou a operar com um maior nível de incerteza (aumento das volatilidades), o que o fez se voltar para opções com strike prices menores (mais reais e seguros).

A hipótese de volatilidade implícita constante estava sendo violada, enquanto o modelo estava trabalhando com base nela.

Sendo assim, ao compararmos estes dois gráficos fica nítida a existência de dois períodos distintos: o período que antecedeu o Crash e o período posterior ao Crash. Pelo menos sob esta ótica, a suspeita do prof. Rubinstein ficou comprovada.

Para dar início à análise do mercado Brasileiro, e aproveitando o ensejo das análises gráficas feitas anteriormente, gostaria de apresentar alguns gráficos característicos do nosso mercado de opções em dois períodos distintos: 1992 e 1997. Estes gráficos apresentam as mesmas duas variáveis: volatilidades implícitas (para opções de compra de TELEBRÁS PN com vencimento em 17/08/92 e 18/08/97) e preços de exercício associados a cada volatilidade. Começarei pelo ano de 1997:

Como durante todo o período recente em que estive escrevendo este trabalho observei um comportamento padrão do gráfico acima mencionado (principalmente nos últimos 2 anos), optei por apresentar 5 gráficos que, na minha opinião, expressam satisfatoriamente o comportamento de nossas opções durante o período <u>recente</u> em estudo (1997). Estes gráficos apresentam o comportamento das volatilidades implícitas das opções de compra de TELEBRÁS PN negociadas no pregão da Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA) para diferentes preços de exercício e mesma data de vencimento, no período compreendido entre 16/06/97 e 20/06/97.

O meu objetivo com isso é fazer o inverso do que fez Rubinstein. Inicialmente demonstrarei graficamente (através do estudo dos gráficos apresentados ao final do capítulo) que as hipóteses de Black & Scholes estão, hoje, sendo plenamente captadas pelo mercado de opções brasileiro, o qual opera ,na média, com volatilidades implícitas bem próximas umas das outras independente do preço de exercício de cada opção com mesma data de vencimento (lembrando que estarei sempre me referindo à opções de compra de TELEBRÁS PN). Uma vez vencida esta etapa, aí sim, comprovarei as suspeitas iniciais através das técnicas estatísticas anteriormente citadas.

Os gráficos 3 a 7, apresentados ao final do trabalho, refletem o comportamento atual do mercado de opções frente a utilização do modelo Black & Scholes. É importante observar que todos os gráficos apresentam linhas quase horizontais, o que reforça a teoria de volatilidades implícitas constantes do modelo B&S. No meu modo de ver, este tipo de gráfico indica um ótimo ajuste do mercado de opções brasileiro à este modelo de precificação, além de indicar que o mercado, de fato, está usando o modelo Black & Scholes. O resultado disto é, a princípio, uma alta eficiência no processo de precificação através deste modelo que será comprovada após os cálculos dos Minimax Percentage Errors anuais ao final deste capítulo.

Entretanto, analisar gráficos recentes não é a maneira mais adequada para se descobrir o comportamento da eficiência do modelo B&S ao longo dos anos. Para acabar com esta limitação construí 4 gráficos adicionais (com as mesmas variáveis) relativos ao ano de 1992, ano este que foi escolhido por ser o ano onde o mercado de opções passou a ganhar uma consistência satisfatória, isto é, sua liquidez se tornou relevante.

Os Gráficos 8 a 11 expressam o comportamento do mercado de opções para o ano de 1992. Mais uma vez, é importante notar o comportamento das volatilidades implícitas da época. Fica clara a existência do "Smile", indicando que o mercado não estava seguindo as premissas Black & Scholes. Mesmo assim, é importante que se diga que, no mercado brasileiro, os gráficos não apresentaram nenhum tipo de padrão bem definido como ficou claro no gráfico do pós crash. Isto significa que para o mercado americano não é possível se falar em ineficiência, mas sim em fatores exógenos não captados pelo modelo. Por outro lado, para o mercado brasileiro, a ineficiência pode ser observada de uma forma geral (ela é sempre a mesma), uma vez que não podemos distinguir nenhum padrão bem definido para seu comportamento como consequência de algum outro fator qualquer.

Logo, a precificação de opções através deste modelo no ano de 1992 se mostrou um tanto imprecisa.

Isto me leva a crer na hipótese do mercado ter vindo se ajustando ao modelo Black & Scholes ao longo dos anos. Graficamente ficou claro que a performance do modelo B&S hoje está muito superior àquela apresentada em 1992, resta apenas comprovar esta hipótese através do teste Minimax.

Uma vez concluída esta primeira fase (gráfica), passo a descrever o teste operacional por mim efetuado com o intuito de reforçar a idéia sugerida anteriormente de que o modelo Black & Scholes está, hoje, ajustado de maneira eficiente ao mercado brasileiro, ao contrário do que estava há cinco anos atrás .

Inicialmente construí uma base de dados que contemplava as seguintes informações:

- Preços de fechamento diários das opções de compra mais líquidas de Telebrás PN (1 in the money, 1 at the money e 1 out of the money) nos anos de 1990, 1996 e 1997

- Preços de fechamento diários do ativo Telebrás PN no mesmo período

- Preço de Exercício de cada opção

- Dias úteis restantes até a data de vencimento das mesmas

- CDI (taxa de juros livre de risco) diário

Com a intenção de dar uma maior homogeneidade e consistência aos dados que seriam utilizados, lancei mão de um pequeno artifício que fosse capaz de classificar todo este extenso conjunto de números em apenas 3 classes distintas (3 grandes grupos) de opções:

a) Classe 1: Opções In The Money

b) Classe 2: Opções At The Money

c) Classe 3: Opções Out of The Money

O artifício anteriormente mencionado consiste basicamente em 3 etapas:

1-) Trazer o preço de exercício, <u>de cada opção que compõe as amostra diárias obtidas</u>, para valor presente através do desconto pela taxa do CDI do dia. Com isto eliminamos qualquer efeito nocivo da variável inflação sob os dados coletados.

Esta foi a fórmula utilizada:

[Strike Price]/[(CDI do dia/3000+1)^(Núm dias úteis até vcto)]

2-) Subtrair do valor obtido no passo anterior o preço do ativo à vista (TEL4) e em seguida dividir o resultado também pelo preço do ativo à vista, de forma a obtermos relações bem definidas entre o preço de exercício da opção e o preço atual da ação:

(V.P. Strike Price - Preço TEL4)/Preço TEL4

3-) Com base nos percentuais obtidos, observar a existência de faixas para classificação de opções. Tais faixas irão representar os intervalos que compreendem os 3 tipos de opções (IN, AT e OUT OF the Money). Isto é, opções in the money apresentarão uma faixa característica de preço de exercício como proporção do preço à vista da ação. O mesmo ocorre para as outras duas classes. Logo, os três grandes grupos de opções anteriormente mencionados possuirão faixas percentuais (strike price com relação ao ativo à vista) características de cada um. Desta forma, cada grande grupo terá um range específico que indicará, a grosso modo falando, qual o range percentual do preço à vista da ação que o caracterizará.

Apresento então, os ranges relativos às 3 classes de opções observados na amostra coletada, e construídos através do procedimento acima descrito:

Classe de Opção	**Range**
IN THE MONEY	-13% a -7%
AT THE MONEY	-7% a 3%
OUT OF THE MONEY	3% a 9%

Após este cuidadoso preparo da base de dados, passei a executar os passos indicados no início da seção IV.2, de forma a calcular a estatística capaz de fornecer uma idéia acerca da eficiência do modelo Black & Scholes em nosso mercado de opções, esta foi a estatística Minimax.

Entretanto, como simples números muitas vezes impossibilitam uma análise mais aprofundada de determinado assunto, preferi trabalhar com outra medida também anteriormente citada em meu trabalho, o Minimax Percentage Error. Esta medida se mostrou mais adequada ao meu estudo, uma vez que expressa com base na estatística Minimax um valor percentual relativo ao erro do modelo.

A seguir apresento algumas tabelas com os resultados dos testes por mim efetuados. Ressalto apenas que, a ausência de alguns meses foi provocada por algumas (muitas!) dificuldades na obtenção dos dados necessários e/ou pela presença de observações anômalas, as quais foram propositadamente descartadas de modo a não distorcer o resultado final do teste.

Minimax Percentage Errors - Média Mensal do Mercado Brasileiro (BOVESPA)
Striking Price

Mês	I - A	A - O	I - O	Mês	I - A	A - O	I - O	Mês	I - A	A - O	I - O
Jan/92	-3,37%	-1,92%	-2,28%	Nov/92	-8,01%	-10,40%	-12,66%	Out/96	-1,93%	-2,19%	-2,96%
Fev/92	-8,58%	-4,25%	-9,04%	Dez/92	-15,21%	-13,65%	-21,40%	Nov/96	-1,26%	-3,28%	-2,81%
Mar/92	-3,09%	-4,83%	-5,04%	Jan/96	-1,96%	-2,26%	-2,31%	Dez/96	-1,15%	-2,84%	-2,18%
Abr/92	-4,41%	-3,40%	-5,18%	Mar/96	-2,12%	-2,19%	-2,89%	Jan/97	-1,52%	-4,96%	-3,17%
Mai/92	-2,47%	-3,37%	-4,14%	Abr/96	-3,14%	-17,96%	-3,72%	Fev/97	-1,98%	-2,64%	-3,55%
Jun/92	-6,20%	-7,62%	-4,87%	Mai/96	-7,48%	-10,88%	-12,83%	Mar/97	-1,61%	-2,85%	-2,29%
Jul/92	-3,47%	-3,50%	-4,90%	Jun/96	-2,74%	-3,44%	-3,19%	Abr/97	-1,72%	-2,63%	-2,25%
Ago/92	-3,22%	-10,11%	-3,95%	Jul/96	-2,67%	-3,07%	-3,98%	Mai/97	-1,15%	-1,75%	-1,73%
Out/92	-13,82%	-14,63%	-17,51%								

I - A representa o par formado por uma opção In The Money e uma At The Money

A - O representa o par formado por uma opção At The Money e uma Out of The Money

I - O representa o par formado por uma opção In The Money e uma Out of The Money

Minimax Percentage Errors - Mediana Mensal do Mercado Brasileiro (BOVESPA)
Striking Price

Mês	I - A	A - O	I - O	Mês	I - A	A - O	I - O	Mês	I - A	A - O	I - O
Jan/92	-2,86%	-0,56%	-1,89%	Nov/92	-7,68%	-11,16%	-14,27%	Out/96	-2,05%	-2,29%	-2,53%
Fev/92	-4,77%	-3,10%	-5,01%	Dez/92	-12,75%	-13,47%	-23,43%	Nov/96	-1,27%	-2,40%	-2,40%
Mar/92	-3,47%	-3,66%	-5,24%	Jan/96	-1,72%	-2,26%	-2,21%	Dez/96	-1,04%	-3,13%	-2,21%
Abr/92	-3,23%	-3,39%	-3,51%	Mar/96	-2,20%	-1,82%	-2,86%	Jan/97	-1,51%	-2,98%	-2,26%
Mai/92	-2,12%	-3,37%	-3,31%	Abr/96	-2,71%	-12,44%	-3,59%	Fev/97	-1,89%	-2,21%	-3,51%
Jun/92	-5,38%	-7,60%	-3,86%	Mai/96	-7,17%	-9,68%	-12,60%	Mar/97	-1,61%	-2,64%	-1,99%
Jul/92	-3,39%	-3,42%	-5,34%	Jun/96	-1,52%	-3,55%	-2,12%	Abr/97	-1,43%	-2,22%	-2,11%
Ago/92	-1,57%	-7,40%	-1,49%	Jul/96	-1,75%	-2,87%	-3,54%	Mai/97	-1,08%	-1,55%	-1,35%
Out/92	-12,17%	-13,49%	-17,80%								

I - A representa o par formado por uma opção In The Money e uma At The Money

A - O representa o par formado por uma opção At The Money e uma Out of The Money

I - O representa o par formado por uma opção In The Money e uma Out of The Money

Minimax Percentage Errors - Média Anual Brasileira

	Striking Price Range		
Ano	**I - A**	**A - O**	**I - O**
1992	-6,53%	-7,06%	-8,27%
1996	-2,72%	-5,35%	-4,10%
1997	-1,60%	-2,97%	-2,60%

I - A *representa o par formado por uma opção In The Money e uma At The Money*

A - O *representa o par formado por uma opção At The Money e uma Out of The Money*

I - O *representa o par formado por uma opção In The Money e uma Out of The Money*

Minimax Percentage Errors - Mediana Anual Brasileira

Ano	Striking Price Range		
	I - A	**A - O**	**I - O**
1992	-3,47%	-3,66%	-5,01%
1996	-1,75%	-2,87%	-2,53%
1997	-1,51%	-2,22%	-2,11%

I - A representa o par formado por uma opção In The Money e uma At The Money

A - O representa o par formado por uma opção At The Money e uma Out of The Money

I - O representa o par formado por uma opção In The Money e uma Out of The Money

Minimax Percentage Errors (%)

Para o Mercado de Opções Americano – Chicago Board Options Exchange

Striking Price Range				
	ITM	**ATM**	**OTM**	**ITM/OTM**
Ano	- 9% to - 3%	- 3% to + 3%	+ 3% to + 9%	- 9% to + 9%
1986	-0.3	-0.5	-0.3	-0.7
1987	-0.7	-1.0	-0.8	-1.6
1988	-2.5	-3.5	-4.1	-7.0
1989	-2.5	-4.8	-6.4	-7.7
1990	-3.4	-5.9	-8.7	-11.2
1991	-4.0	-7.0	-10.3	-13.1
1992	-4.9	-8.8	-14.2	-15.3

É fácil observar com base nestas tabelas, a comprovação de todas as suspeitas anteriores relativas à eficiência do modelo.

O ano de 1992 apresentou uma Minimax Percentage Error Média da ordem de 7,3%, se levarmos em conta todas as combinações de pares de opções analisadas, contra 4,1% em 1996 e 2,4% em 1997. O mesmo ocorreu para a mediana do MPE: 4,0% em 1992 contra 2,4% em 1996 e 1,9% em 1997. As estatísticas mensais encontram-se em tabelas separadas e apresentam a mesma tendência: uma melhora significativa da performance do modelo com o passar dos anos.

O fato é que, através do teste Minimax, este trabalho conseguiu comprovar matematicamente a melhora na performance da precificação de opções através de Black & Scholes ao longo dos anos. Uma pequena (porém significativa) parte desta melhora provavelmente advém da maior liquidez que o mercado foi adquirindo, uma vez que o mercado de opções é um mercado relativamente novo em nosso país. A outra grande parte, não me restam dúvidas, está associada a difusão do modelo de Black & Scholes através de nosso mercado de Capitais. Como já ocorrido anteriormente nos EUA, os operadores brasileiros passaram a necessitar de uma ferramenta que os auxiliasse no processo de precificação deste novos derivativos, que vinham ganhando cada dia maior liquidez. A "descoberta" do modelo B&S veio para dar uma maior segurança às estratégias operacionais destes investidores.

Uma vez que a utilização do modelo começou a representar uma vantagem comparativa para quem o detinha, a grande maioria dos profissionais passou a adotá-lo como forma de manter seu grau de competitividade junto aos outros integrantes do sistema financeiro. Isso significa dizer que, uma vez descoberto por nossos profissionais, a larga utilização do modelo B&S em nosso mercado foi o fator primordial para o ganho de performance do modelo em períodos recentes. Isto pelo simples fato de que a partir deste momento, todos estariam traçando suas estratégias com base em um instrumento comum de precificação, um instrumento rápido e seguro mais conhecido como o modelo Black & Scholes. Tanto isto é verdade que este mesmo tipo de comportamento foi também observado para o próprio mercado de capitais americano a partir de 1973. Os anos que se sucederam ao seu advento, foram anos em que os ganhos de performance do modelo se mostraram extremamente significativos (exatamente como o proposto neste trabalho para o mercado brasileiro). Este pode ser tido como o primeiro ciclo americano no processo de precificação de opções, o ciclo de ajuste ao modelo Black & Scholes provocado por sua forte difusão entre os operadores de mercado e, consequentemente, sua larga utilização pelos mesmos.

Hoje, enquanto o Brasil passa ainda por este primeiro ciclo, o mercado americano já se encontra em um segundo ciclo iniciado após o crash de 1987, o ciclo de ajuste a outros processos de implementação do modelo Black & Scholes e mais recentemente de modelos Binomiais Alternativos que permitam se atingir resultados mais abrangentes e ainda mais precisos. Para isso são utilizados os conceitos de árvores binomiais implícitas, trinomiais e etc...

Uma curiosidade porém, com relação a isto, é a existência de instituições financeiras brasileiras já preocupadas em se adaptar a este segundo ciclo através do desenvolvimento de técnicas específicas para implementação tanto do modelo Black & Scholes quanto de Modelos Binomiais Alternativos. Esta preocupação pode, quem sabe, se refletir numa vantagem comparativa entre instituições que desencadeie um novo ciclo para o mercado brasileiro daqui a alguns anos

Além disto, ao longo dos inúmeros testes efetuados, alguns outros fatos importantes puderam ser observados. Em primeiro lugar, apesar da eficiência do modelo B&S, a aproximação da data de exercício das opções exerce uma influência fortemente negativa no modelo, o qual passa a apresentar MPE's significativamente maiores nos cinco pregões anteriores (aproximadamente) ao vencimento. Tal queda de performance pode ser causada pela migração em massa dos investidores buscando opções do próximo exercício, troca de posições buscando opções at the money[35] ou pela pressão dos comprados/vendidos sobre a cotação do preço do ativo à vista. Em segundo lugar, existe um caso onde o modelo B&S apresenta altos valores de MPE e portanto uma baixa performance de precificação, é o caso das opções **deep** in the money e **deep** out of the money. Entretanto, por tais opções não apresentarem elevada liquidez, preferí não dar maior ênfase à esta peculiaridade brasileira. Em último lugar, ainda foi possível observar que quanto

maior a liquidez da opção precificada, bem como do seu ativo objeto, melhor a performance do modelo B&S.

Enfim, resumindo as conclusões anteriores, o modelo Black & Scholes vem se adaptando ao longo dos anos de forma cada vez melhor ao mercado Brasileiro de tal forma que, excluindo situações peculiares, sua utilização pode ser vista como um processo ótimo de precificação de opções de compra brasileiras. Tal procedimento se faz um instrumento ótimo na adoção de estratégias operacionais, dado que toda estratégia se baseia em preços que carregam em sí quase todas as informações do mercado.

---

[35] Neste caso as opções out of the money passam a ser precificadas de maneira bastante imprecisa

CAPÍTULO V - CONCLUSÃO

O presente trabalho teve por objetivo provar que o mercado de opções brasileiro, ao contrário do americano, vêm se ajustando de forma cada vez melhor ao modelo Black & Scholes para precificação de opções. Para atingir este objetivo, inicialmente descrevi toda a mecânica operacional do modelo a ser analisado de forma a tornar possível qualquer questionamento acerca do teste efetuado. Ao descrever o modelo, pude discriminar a diferença entre volatilidades implícita e histórica enfatizando a necessidade de se estimar de forma adequada a volatilidade histórica do ativo objeto para tornar possível a adoção de uma estratégia operacional eficiente e segura. O modelo Black & Scholes só apresenta resultados operacionais ótimos quando se utiliza a "correta" volatilidade histórica, uma vez que toda operação é construída com base na comparação: Volatilidade Implícita X Volatilidade Histórica.

Uma vez descrito o modelo B&S, passei a introduzir algumas noções de modelos alternativos para precificação de opções como forma de mostrar a possibilidade de utilização de outros modelos apesar da suposta inferioridade destes frente ao modelo B&S. Ainda não foi possível encontrar um instrumento que fosse capaz de superar o modelo B&S, ainda mais no caso brasileiro. Este modelo continua sendo a maneira mais rápida, eficiente e de baixo custo para se precificar opções.

Posteriormente, e como objetivo principal deste trabalho, descreví em detalhes o teste Minimax. Este teste, inicialmente proposto por Mark Rubinstein em 1994, mede o grau de relevância econômica associado ao componente de erro do modelo. Isto é, é uma medida do quanto o modelo está, de fato, distorcendo o preço das opções. De fácil implementação, este teste nos permitiu concluir que realmente, as precificações Black & Scholes hoje possuem alto grau de confiabilidade, o que é expresso através de uma margem de erro da ordem de 2%.

Através deste mesmo teste foi possível comprovar a melhoria na performance do modelo ao longo dos anos. A amostra de 1992 apresentava margens de erro da ordem de 7% enquanto a de 1996 apresentava margem de 4%. Tal diminuição do erro ao longo do tempo é fruto da difusão da utilização do modelo dentre os participantes do mercado financeiro brasileiro, bem como da expansão de nosso mercado de opções.

A segunda prova de que este ajuste ao modelo B&S vem melhorando cada vez mais em nosso mercado, pode ser vista graficamente. Através da idéia de volatilidades implícitas constantes para opções com mesma data de vencimento de Black & Scholes, podemos concluir com base nos gráficos de 3 a 11 que:

- Em 1992 tal premissa não estava sendo cumprida, ou seja, o modelo Black & Scholes não estava funcionando corretamente e o mercado não se encontrava ajustado a ele

- Em 1997, por outro lado, o mercado se apresenta perfeitamente ajustado à premissa Black & Scholes, onde as opções com mesma data de vencimento de fato estavam apresentando praticamente a mesma volatilidade implícita

Com isso fica duplamente (gráfica e matematicamente) comprovado que o mercado de opções brasileiro vem ao longo do tempo se ajustando ao modelo B&S, de modo que hoje este modelo apresenta uma performance muito superior à que apresentava há cinco anos atrás. Logo, o efeito do crash da Bolsa de Nova York em 1987 (proposto por Rubinstein) não foi capaz de contaminar o mercado brasileiro, se constituindo assim num fenômeno local. O fato de tal choque não ter se alastrado para o mercado brasileiro pode ter sido simplesmente uma consequência da inexistência de um mercado de opções bem estruturado em nosso país nos anos 80 e portanto da não utilização do modelo Black & Scholes neste período.

Entretanto, apesar das evidências, muitos são os que preferem utilizar árvores binomiais para implementação do modelo Black & Scholes, como uma maneira de se fugir à hipótese de volatilidades implícitas constantes. Maiores detalhes à respeito da utilização do modelo binomial como implementação/aperfeiçoamento do modelo Black & Scholes podem ser obtidas no Apêndice A deste trabalho. Por enquanto, eu prefiro ficar com John Hull que em recente entrevista deixou claro o seu ponto de vista:

"É um erro considerar que as árvores binomiais sejam fundamentalmente diferentes do modelo Black & Scholes .... A árvore binomial nada mais é do que uma representação discreta do modelo que supõem comportamento lognormal do preço do ativo à vista. As árvores binomiais tendem a convergir para o modelo Black & Scholes."

"O Modelo Black & Scholes é o padrão atual da indústria para opções de ações, moedas e mercados futuros. É claro que não é perfeito.... Em vez de desenvolver novos modelos, os especialistas têm produzido métodos para fazer o modelo Black & Scholes funcionar..."

"Acredito que o modelo Black & Scholes veio para ficar."

APÊNDICE

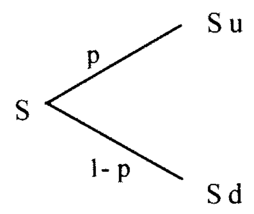
Apêndice A - O método Binomial

Proposto inicialmente pelo trio Cox, Ross & Rubinstein, este método pretende acabar com as limitações do modelo Black & Scholes no que se refere ao comportamento do preço do ativo objeto, de sua volatilidade, de seus dividendos e do tipo de opção em análise (européia ou americana).

Para atingir tal propósito, o período de tempo de duração das opções, de seu lançamento até sua data de vencimento, foi dividido em pequenos intervalos de tempo definidos como Δt. Por sua vez, e de acordo com as oscilações do mercado, é natural que dentro de cada intervalo de tempo Δt, o preço da ação apresente uma variação para cima (valorização) ou para baixo (desvalorização). No primeiro caso o preço da ação iria se valorizar em u $(u>1)$, enquanto que no segundo caso o preço da ação iria se desvalorizar em d $(d<1)$.

A única coisa que resta, então, é quantificar a probabilidade destes dois movimentos. Para isto, ficou estabelecido que p significa a probabilidade do preço da ação apresentar um movimento ascendente, enquanto (1-p) significa probabilidade do preço da ação apresentar um movimento descendente.

Este movimento de preços, para um único período de tempo (Δt) apenas, pode ser representado graficamente da seguinte forma:



Esta é a idéia fundamental do modelo quanto ao comportamento do preço do ativo objeto do derivativo.

Para tornar possível a sequência do modelo e a determinação de suas variáveis, é preciso que se deixe claro que o modelo Binomial, assim como o modelo Black & Scholes, também trabalha com a suposição de risco neutro, na qual qualquer derivativo pode ser avaliado com base neste comportamento específico.

Isto implica necessariamente em duas condições:

a) Existe uma taxa de juros livre de risco na economia (r) que representa o retorno esperado dos títulos negociados

b) Esta mesma taxa de juros livre de risco é o fator de desconto para o cálculo do valor presente de fluxos futuros

Tomando por base um portfolio neutro ao risco, pode-se dizer que o preço de uma ação estará corrigido ao final do período Δt em $er^{\Delta t}$, ou seja, o novo preço da ação será $Ser^{\Delta t}$.

A partir disto, podemos montar as três restrições do modelo binomial[36]:

a) $Ser^{\Delta t} = pSu + (1-p)Sd$

b) $\sigma^2\Delta t = pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2$

c) $u = 1/d$

O resultado destas três restrições para um Δt muito pequeno é o seguinte:

- $p = (a-d)/(u-d)$

- $u = e^{\sigma \Delta t^{1/2}}$

- $d = e^{-\sigma \Delta t^{1/2}}$

---

36 Uma quarta restrição deve ser mencionada para que se evitem arbitragens entre os mercados acionários e de juros: u > r > d. Caso isso não ocorresse, o investidor poderia perfeitamente tomar emprestado à uma taxa r e comprar uma ação que lhe renderia uma taxa maior qualquer que fosse o movimento do mercado (caso onde u > d > r)

- $a = e^{r\Delta t}$

Logo, segundo Dubofsky[37], para a perfeita derivação do modelo precisamos apenas ressaltar que os mercados são perfeitamente competitivos, que todos os indivíduo irão preferir sempre mais riqueza a menos riqueza (comportamento racional) e que os parâmetros $\underline{u}$ e $\underline{d}$ são conhecidos ou constantes para os próximos períodos em análise.

Inicialmente procurarei centrar minhas atenções num modelo binomial de um período apenas, de forma a deixar claros os procedimentos adotados. Criemos, então, um portfolio que apresente um retorno igual ao fornecido por uma opção de compra[38]. Para isso, é preciso que se tome, no mercado (à uma taxa de juros livre de risco r), um montante $\underline{B}$ em dinheiro para financiar a compra de uma quantidade $\underline{\Delta}$ de ações. Isto implica que o portfolio equivalente à uma opção de compra pode ser construído a partir de uma posição comprada no papel à vista juntamente com o financiamento desta compra à uma taxa de juros livre de risco. Graficamente, podemos representar o comportamento deste portfolio da seguinte maneira:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \Delta Su + rB \\ \Delta S + B \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & \\ & \Delta Sd + rB \end{tikzcd}$$

Por conseguinte, os valores da call no instante t poderiam ser expressos através das seguintes equações:

- $Cu = \Delta Su + rB$, caso o preço da ação subisse
- $Cd = \Delta Sd + rB$, caso o preço da ação caísse

---

[37] Dubofsky, D . A .; "Options and Financial Futures"; McGrawn Hill (1993)

[38] Raciocínio análogo pode ser feito para opções de venda, basta que sejam invertidas posições compradas para vendidas e empréstimos tomados para empréstimos cedidos

Pelo fato de termos duas equações com algumas variáveis em comum, podemos resolvê-las como se fosem um sistema, de forma a encontrar os valores ótimos para Δ e B uma vez conhecidos os demais parâmetros.

Após a resolução do sistema proposto, conseguimos definir as duas equações a seguir:

a) $\Delta = (Cu-Cd)/S(u-d)$

b) $B = [uCd - dCu]/[(u-d)r]$

É fundamental que se determine o valor de Δ pois é através dele que se toma a decisão de quantas ações comprar de forma a dar ao portfolio o mesmo retorno de uma call. Pode-se dizer que este é um processo de criação de uma opção sintética. Além disso, é importante salientar que o parâmetro Δ possui a mesma interpretação do parâmetro $\underline{\Delta}$ do modelo de Black & Scholes ("derivada do preço da opção com relação ao preço do ativo à vista").

O valor do parâmetro B, por sua vez, irá indicar o quanto o investidor precisará tomar emprestado no mercado a fim de financiar a posição comprada de seu portfolio.

Uma vez estabelecidos os parâmetros, pode-se substituí-los na equação da call para se chegar à seguinte fórmula (após simplificações):

$$\mathbf{C = [CuP + Cd(1-p)]/r} \qquad \text{para, } p = (r - d)/(u-d)$$

Esta é a equação que precifica uma call através do método binomial, para um único período.

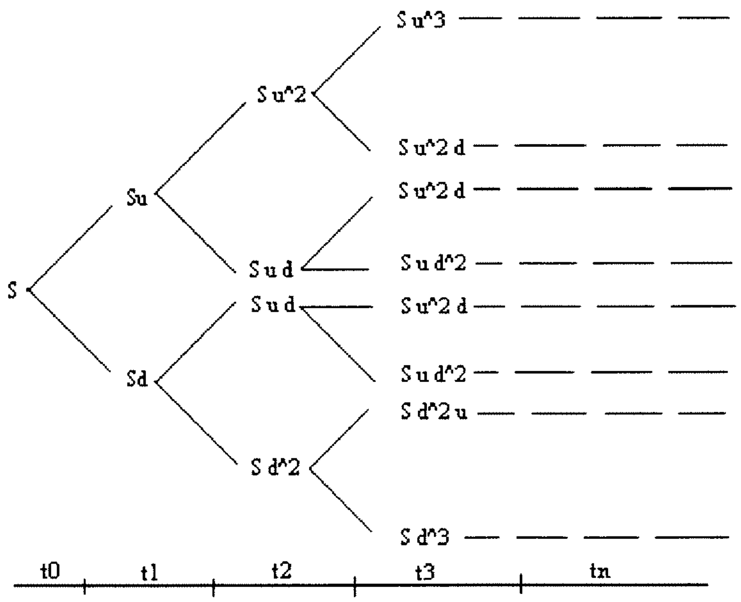
Se pensarmos que o preço da call é dado pelo valor presente do valor esperado do ganho na data de vencimento, a equação acima pode ser também escrita como:

$$\mathbf{C(t_0) = E[1/r * Máx\{0, S(t_1)-K\}]}$$

Antes de prosseguir, gostaria de citar um trecho do livro Modern Portfolio Theory and Investments Analisys[39]: "... nesta derivação, não foram levadas em conta probabilidades de movimentos de alta ou de baixa, ... , P e (1-P) não são probabilidades, são, de fato, números que dependem dos movimentos de alta e baixa e da taxa de juros livre de risco. .... O valor da call, entretanto, dependerá de Cu, Cd, r, u e d onde Cu e Cd dependem, por sua vez, do preço de exercício da call, das magnitudes de u e d e do preço corrente da ação objeto".

Mesmo assim, diversas derivações alternativas acabaram por apresentar o mesmo resultado anterior. Isto implica em se dizer que não existe no mundo real a possibilidade de existência de um modelo binomial de apenas um período. O modelo, realmente apresenta resultados muito expressivos quando adotamos um número n de períodos com $n \to \infty$. O que apresenta uma grande vantagem com relação aos outros modelos, a vantagem de ser recurssivo.

O próximo passo, então, é generalizar o modelo binomial para n períodos. Note que este processo será apenas uma extensão dos fundamentos citados anteriormente para um único período t. Desta forma expandiremos a árvore binomial da seguinte maneira :



[39] Elton, Edwin J. & Gruber, Mrtin J.; John Wiley & Sons, INC (1991), páginas 589-590

Abreviando a derivação matemática do modelo binomial para n períodos, a qual pode ser encontrada nas páginas 603 a 606 do livro Modern Portfolio Theory and Investments Analisys, chegamos à seguinte equação:

$$C = SB[a,n,P'] - Er^{-n}B[a,n,P]$$

onde,

C = preço da Call

S = preço corrente do ativo objeto

B[a,n,P'] = probabilidade de ocorrer um número de altas maior do que o expresso pelo parâmetro a, num universo de n movimentos onde a probabilidade de um movimento de alta é dada por P' [40]

E = preço de exercício

n = número de períodos de tempo (dias) até a data de vencimento

r = 1+ taxa de juros livre de risco da economia

a = número mínimo de altas do preço do ativo objeto

P = (r-d)/(u-d)

P' = u/r * P

u = tamanho do movimento de alta

d = tamanho do movimento de baixa

O tamanho dos movimentos, tanto de alta quanto de baixa, pode ser estimado através de aproximações exponenciais que levem em conta o desvio padrão anualizado dos retornos do ativo objeto, o tempo em anos para a data de vencimento e o número de intervalos em que o período está sendo subdividido:

[40] Geralmente esta probabilidade pode ser obtida através de tabelas auxiliares do modelo

$$u = e^{+\sigma(t/n)^{\wedge}\frac{1}{2}}$$

$$d = e^{-\sigma(t/n)^{\wedge}\frac{1}{2}}$$

Com estas fórmulas, creio eu, a intuição do modelo deixa de apresentar aspectos simplesmente teóricos para passar a espelhar a realidade dos movimentos de mercado dos ativos em análise.

A idéia básica do modelo pode se tornar mais clara através de um simples exemplo prático[41]:

Imagine que uma ação preferencial da empresa Telebrás é negociada em pregão da Bolsa de Valores de São Paulo à um preço de R$ 100 no dia 13/02/1997. Uma opção de compra deste ativo com Strike Price de R$ 100 também pode ser adquirida no mesmo mercado.

Suponha que ao final do pregão do dia 14/02/97 o preço da ação Telebrás PN possa oscilar tanto para R$ 94 quanto para R$ 194, e que o custo para se tomar qualquer montante em dinheiro emprestado esteja na faixa de 2,00% (taxa de juros livre de risco).

A partir disso poderemos achar o preço pelo qual a call deve estar sendo negociada, tomando como hipóteses fundamentais[42] a ausência de arbitragem e o portfolio neutro ao risco (não existem ganhos/lucros). Consideremos, então, a seguinte operação:

- Venda de 1.000.000 de opções OTC 48 (Strike 100)
- Compra de 1.000.000 ações TEL 4 ao preço de R$ 100/mil
- Tomada de R$ 92.160 à uma taxa de 2% a ser paga ao final do período

---

[41] Este exemplo foi feito para um modelo de apenas 1 período. No entanto, como já discutido anteriormente, não existem barreiras para que este mesmo exemplo possa ser expandido para n períodos.
[42] Tais hipóteses é que permitem que o modelo seja derivado. Logo, são de importância fundamental para o modelo.

Para que fique mais claro o raciocínio a ser utilizado no momento em que formos zerar o lucro deste portfolio, basta que se observe a tabela a seguir:

Composição hipotética de um Portfolio "*Zero-Profit*"

		14/02/1997	
	13/02/1997	TEL4 = R$ 94	TEL4 = R$ 194
Venda 1.000.000 OTC 48	1.000 C	-	- 100.000
Compra 1.000.000 TEL4	- 100.000	94.000	194.000
Empréstimo	92.160	≅ - 94.000	≅ - 94.000
Retorno do Portfolio	0	0	0
Valor de C para *0 profit*	7,84	-	-

Esta tabela apresenta de uma forma mais simplificada a operação mencionada anteriormente juntamente com as projeções de preço ao final do único período de tempo em questão[43].

É importante salientar que o uso de um preço extremo, como é o caso do preço R$ 194 para TEL4 em 14/02/1997, é fundamental para que fique clara a lógica do raciocínio do portfolio neutro ao risco e a ausência de arbitragens no mercado.

Olhando a tabela acima pode-se notar que, qualquer outro preço para a call que não fosse o R$ 7,84 proposto, possibilitaria oportunidades de ganhos ou perdas no período subsequente, uma vez

[43] Para mais de um período, o investidor teria de rebalancear seu portfolio da melhor maneira possível

que o investidor estaria obtendo um ganho ou uma perda já no dia 13/02.

Baseado neste raciocínio, pode-se concluir que o preço da call pode ser definido, como já mencionado anteriormente, com base apenas no seu preço de exercício, no preço do ativo objeto, na taxa de juros livre de risco e na direção esperada do movimento do preço do ativo objeto. O que implica em se dizer que, em nenhum momento a probabilidade de alta ou baixa do preço do ativo objeto é levada em conta. De fato, tal afirmativa pode ser comprovada observando-se a fórmula binomial de precificação de opções para n períodos. Nesta fórmula, nenhum componente relativo à estas probabilidades se faz presente. Portanto, não é preciso que se façam previsões acerca de qual será o comportamento do preço da ação ao longo do tempo. Previsões não existem, o que existe é o feeling do bom investidor.

Além disso, o valor da call não será diretamente sensível ao comportamento do investidor frente ao conceito de risco, a única hipótese feita com respeito ao seu comportamento é a de que ele seja racional o suficiente para saber quando exercer e quando não exercer uma opção.

Em termos de variáveis aleatórias, o preço de uma call irá depender, diretamente, apenas de uma: o preço da ação, isto é, nenhum outro ativo será capaz de interferir/influenciar o processo de precificação de uma call a não ser o preço de seu próprio ativo objeto. Entretanto, e uma vez que a fórmula de precificação nada mais é do que uma relação entre C, K, S, d, n, u e r, pode-se dizer que o comportamento de risco do investidor bem como as oscilações de ativos alternativos negociados de mercado somente poderiam afetar o processo de precificação caso agissem de maneira indireta afetando o comportamento das variáveis que compõem a equação.

O fato deste ser um modelo recursivo, traz a vantagem de que comportamentos irracionais por parte dos investidores não implicariam em inviabilização da determinação dos parâmetros do modelo. Sendo assim, este seria um aspecto fundamental em modelos binomiais que contemplassem pagamentos de dividendos, posto que neste caso os indivíduos não carregariam necessariamente suas opções até a data de vencimento.

Bibliografia

- AMIN, Kaushik I.; Journal of Finance: "Jump Diffusion Option Valuation in Discrete Time"; nº 5: 1833-1863, Dezembro 1993

- BESSADA, Octavio; O Mercado Futuro e de Opções; Record, 3ª Edição,1994

- BM&F; Resenha BM&F núm. 110; Junho 1996

- COX, John C. & ROSS, Stephen A.; "The Pricing of Options for Jump Processes"; Working Paper nº 2-75, University of Pennsylvania, Abril 1975.

- COX, John C. & RUBINSTEIN, Mark; Options Markets; Prentice Hall, New Jersey, USA, 1985

- DUBOFSKY, D.A.; Options and Finacial Futures; McGraw Hill, N.Y., USA, 1993

- EDWARDS, Franklin R. & MA, Cindy W.; Futures & Options; McGraw Hill, N.Y., USA, 1992

- ELTON, Edwin J. & GRUBER, Martin J.; Modern Portfolio Theory and Investments Analysis; Wiley, USA, 1991

- GUJARATI, Damodar N.; Basic Econometrics; McGraw Hill, N.Y., USA, 1988

- HULL, John C.; Introdução aos Mercados Furturos e de Opções; BM&F, $2^{\underline{0}}$ Edição,1995

- HULL, John C.; Options Futures and other Derivative Securities; Prentice Hall, New Jersey, USA,1989

- MERTON, Robert C.; Journal of Financial Economics: "Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous"; $n^{\underline{0}}$ 3: 125-144, Jan-Mar 1976

- PINHEIRO, Marcelo A.; "Volatilidade: Importância e Utilidade no Mercado Financeiro"; Monografia de Final de Curso, Dpto Economia, Dezembro 1995

- RUBINSTEIN, Mark; Journal of Finance: "Displaced Diffusion Option Pricing"; $n^{\underline{0}}$ 38: 213-217, Março 1983

- RUBINSTEIN, Mark; Journal of Finance: "Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23,1976 through August 31,1978"; $n^{\underline{0}}$ 2: 455-480, Junho 1985

- RUBINSTEIN, Mark; Journal of Finance: "Implied Binomial Trees"; $n^{\underline{0}}$ 3: 770-817, Julho 1994

- SANVICENTE, Antonio Z. & MELLAGI FILHO, Armando: Mercado de Capitais e Estratégias de Investimento; Atlas, $1^{\underline{0}}$ Edição, 1988

GRÁFICOS & TABELAS

TABELA 1 - *Representative Displaced Diffusion Call Values*

$\beta = 0 \quad \delta_K = d_K = 0$

$S = 40 \quad r = 1{,}05$

		$\alpha = 1$ (Blak & Scholes)			$\alpha = 0.75$			$\alpha = 0.50$		
		Expiration Month								
σ	K	January	April	July	January	April	July	January	April	July
0.2	30	10.12	10.49	10.38	10.12	10.49	10.87	10.12	10.48	10.85
0.2	35	5.15	5.76	6.40	5.15	5.74	6.37	5.15	5.71	6.31
0.2	40	1.00	2.17	3.00	1.00	2.16	3.01	1.00	2.17	3.00
0.2	45	0.02	0.51	1.10	0.03	0.53	1.15	0.03	0.58	1.23
0.2	50	-	0.08	0.32	-	0.09	0.37	-	0.12	0.46
0.3	30	10.12	10.58	11.14	10.12	10.56	11.09	10.12	10.52	10.98
0.3	35	5.22	6.25	7.17	5.21	6.22	7.13	5.20	6.14	7.02
0.3	40	1.46	3.07	4.19	1.46	3.09	4.22	1.46	3.10	4.25
0.3	45	0.16	1.26	2.24	0.17	1.32	2.33	0.20	1.42	2.51
0.3	50	0.01	0.44	1.11	0.01	0.50	1.23	0.02	0.62	1.48
0.4	30	10.13	10.83	11.65	10.13	10.78	11.56	10.12	10.66	11.34
0.4	35	5.39	6.89	8.10	5.37	6.86	8.07	5.33	6.76	7.98
0.4	40	1.92	3.98	5.37	1.92	4.02	5.46	1.93	4.07	5.61
0.4	45	0.42	2.10	3.43	0.44	2.21	3.62	0.50	2.40	3.97
0.4	50	0.06	1.03	2.12	0.07	1.16	2.37	0.10	1.41	2.84

Tabela extraída do artigo "Displaced Diffusion Option Pricing"; Journal of Finance, Vol 38 - Março 1983 pág 216

TABELA 2

Minimax Percentage Errors (%)

Para o Mercado de Opções Americano – Chicago Board Options Exchange

Striking Price Range				
	ITM	**ATM**	**OTM**	**ITM/OTM**
Ano	- 9% to - 3%	- 3% to + 3%	+ 3% to + 9%	- 9% to + 9%
1986	-0.3	-0.5	-0.3	-0.7
1987	-0.7	-1.0	-0.8	-1.6
1988	-2.5	-3.5	-4.1	-7.0
1989	-2.5	-4.8	-6.4	-7.7
1990	-3.4	-5.9	-8.7	-11.2
1991	-4.0	-7.0	-10.3	-13.1
1992	-4.9	-8.8	-14.2	-15.3

TABELA 3

Minimax Dollar Errors

Para o Mercado de Opções Americano – Chicago Board Options Exchange

Striking Price Range				
	ITM	**ATM**	**OTM**	**ITM/OTM**
Ano	- 9% to - 3%	- 3% to + 3%	+ 3% to + 9%	- 9% to + 9%
1986	-0.025	-0.025	-0.007	-0.044
1987	-0.070	-0.056	-0.031	-0.118
1988	-0.251	-0.212	-0.144	-0.551
1989	-0.248	-0.266	-0.191	-0.599
1990	-0.364	-0.382	-0.297	-0.908
1991	-0.371	-0.382	-0.250	-0.887
1992	-0.422	-0.389	-0.221	-0.858

Gráfico 1 - Situação Anterior ao Crash (Junho/1987) para opções do Índice S&P 500

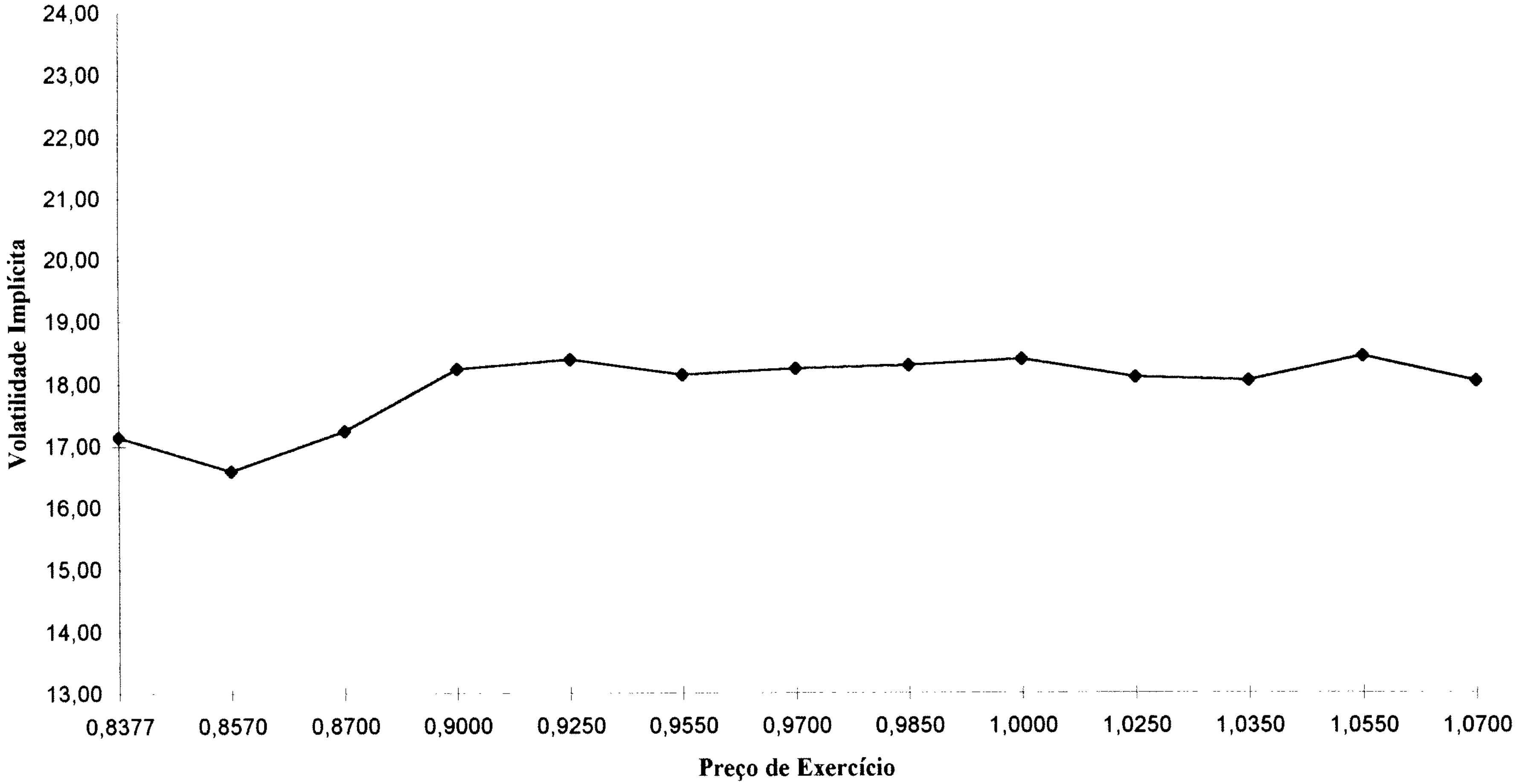


Gráfico extraído do artigo Implied Binomial Trees de autoria de Mark Rubinstein; Journal of Finance; nr. 3: pág. 776, Julho 1994

**Gráfico 2 - Situação Posterior ao Crash (Janeiro/1990)
para opções do índice S&P 500**

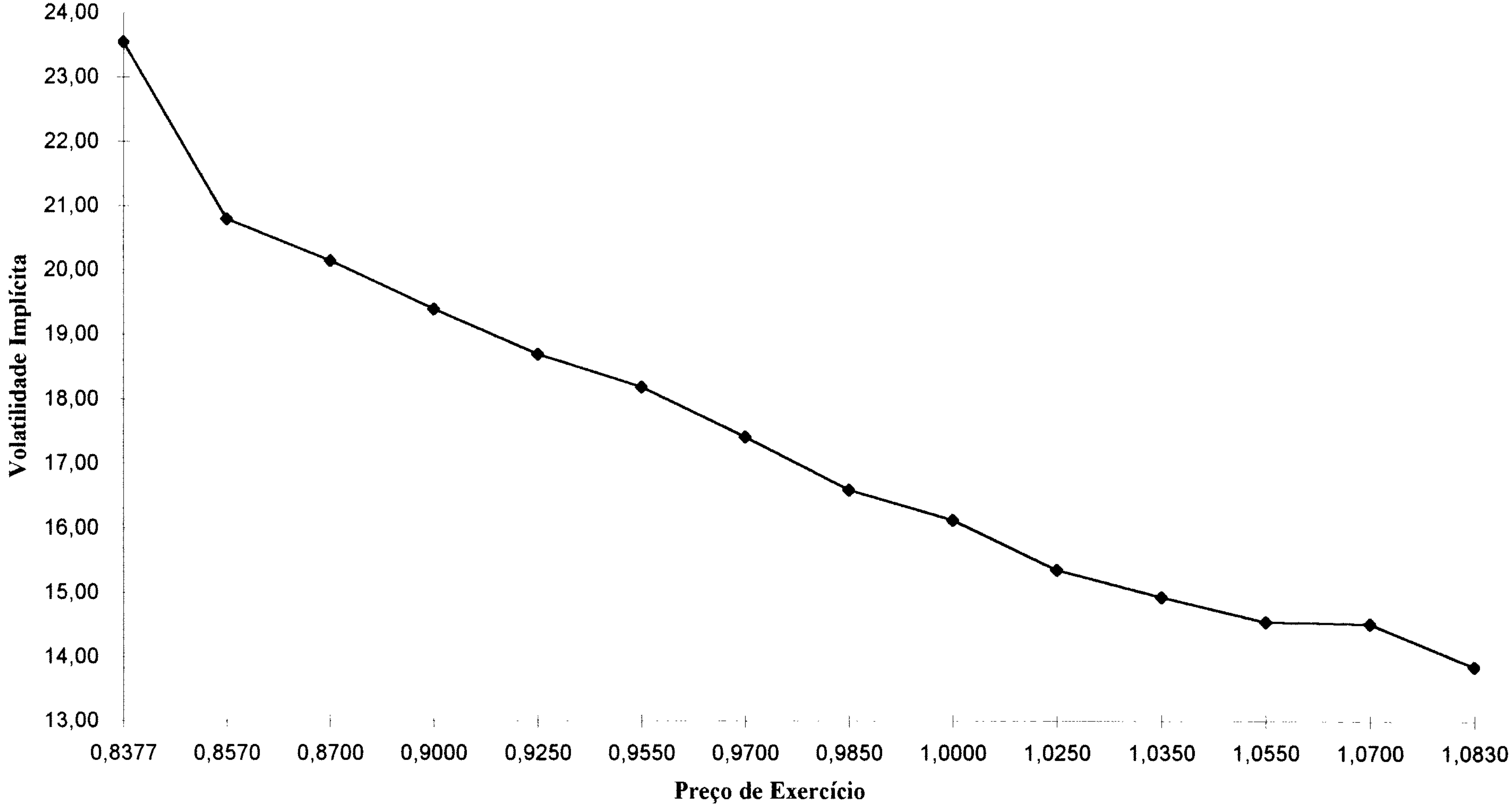


Gráfico extraído do artigo Implied Binomial Trees de autoria de Mark Rubinstein; Journal of Finance; nr. 3: pág. 776, Julho 1994

Gráfico 3 - Volatilidade Implícita das opções de compra de TELEBRÁS PN com mesma data de vencimento e diferentes preços de exercício após o pregão BOVESPA do dia 16/06/97

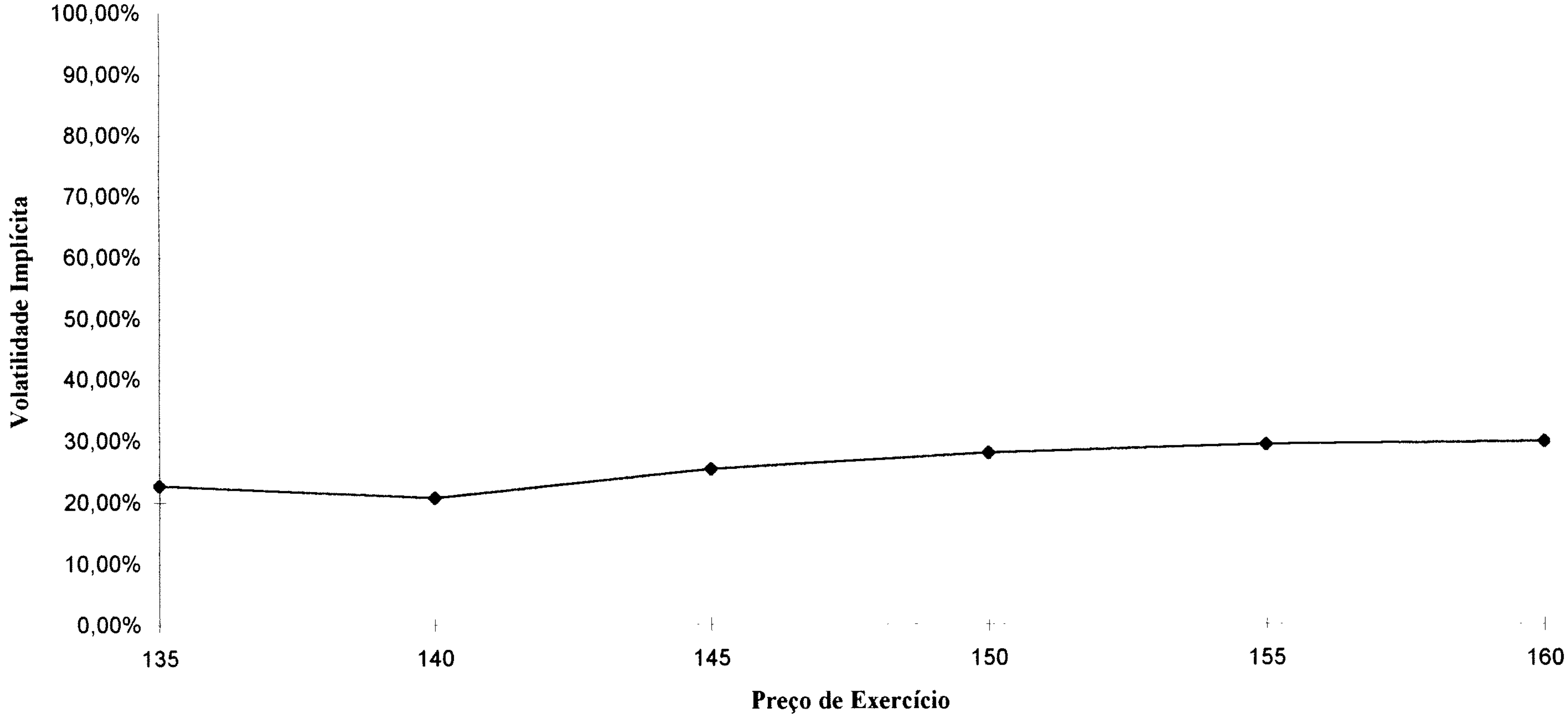


Gráfico 4 - Volatilidade Implícita das opções de compra de TELEBRÁS PN com mesma data de vencimento e diferentes preços de exercício após o pregão BOVESPA do dia 17/06/97

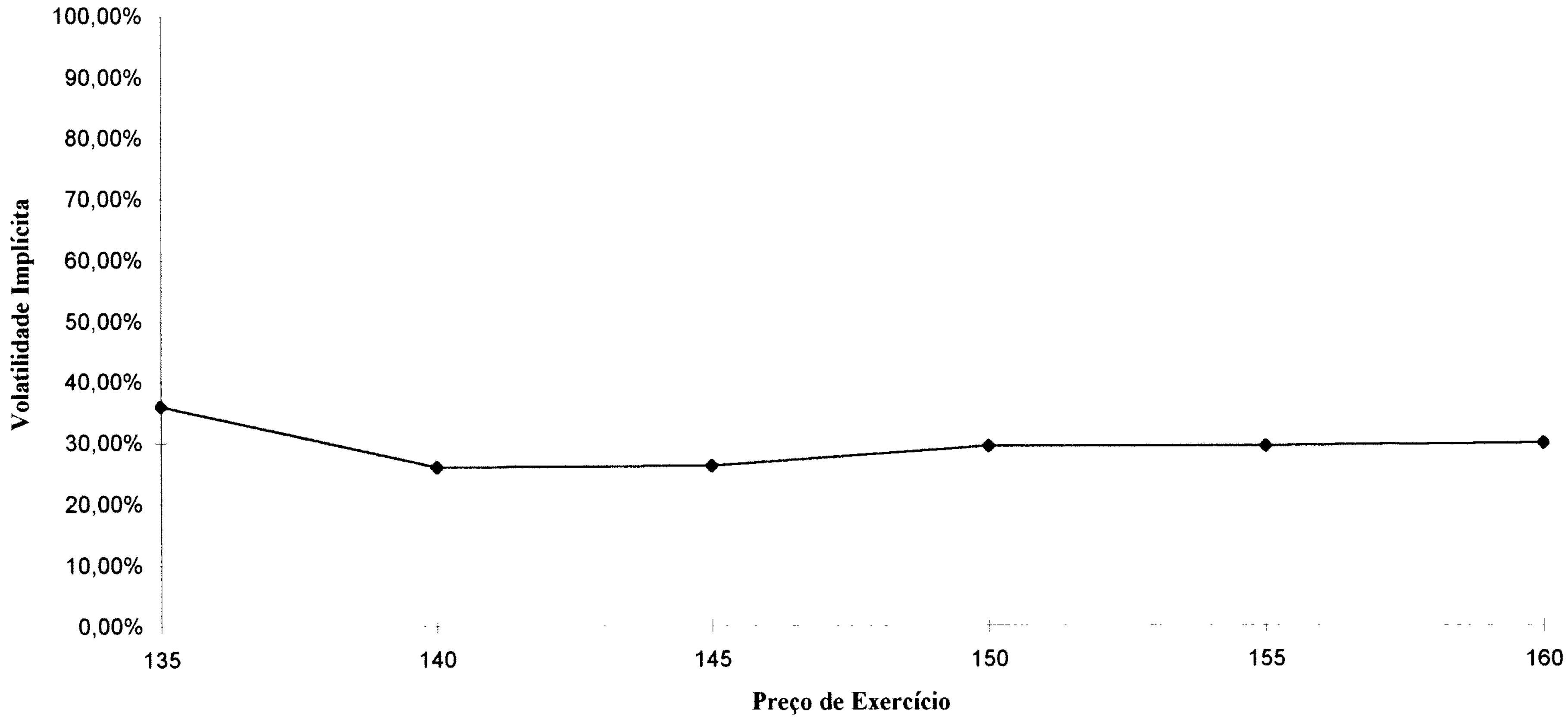


Gráfico 5 - Volatilidade Implícita das opções de compra de TELEBRÁS PN com mesma data de vencimento e diferentes preços de exercício após o pregão BOVESPA do dia 18/06/97

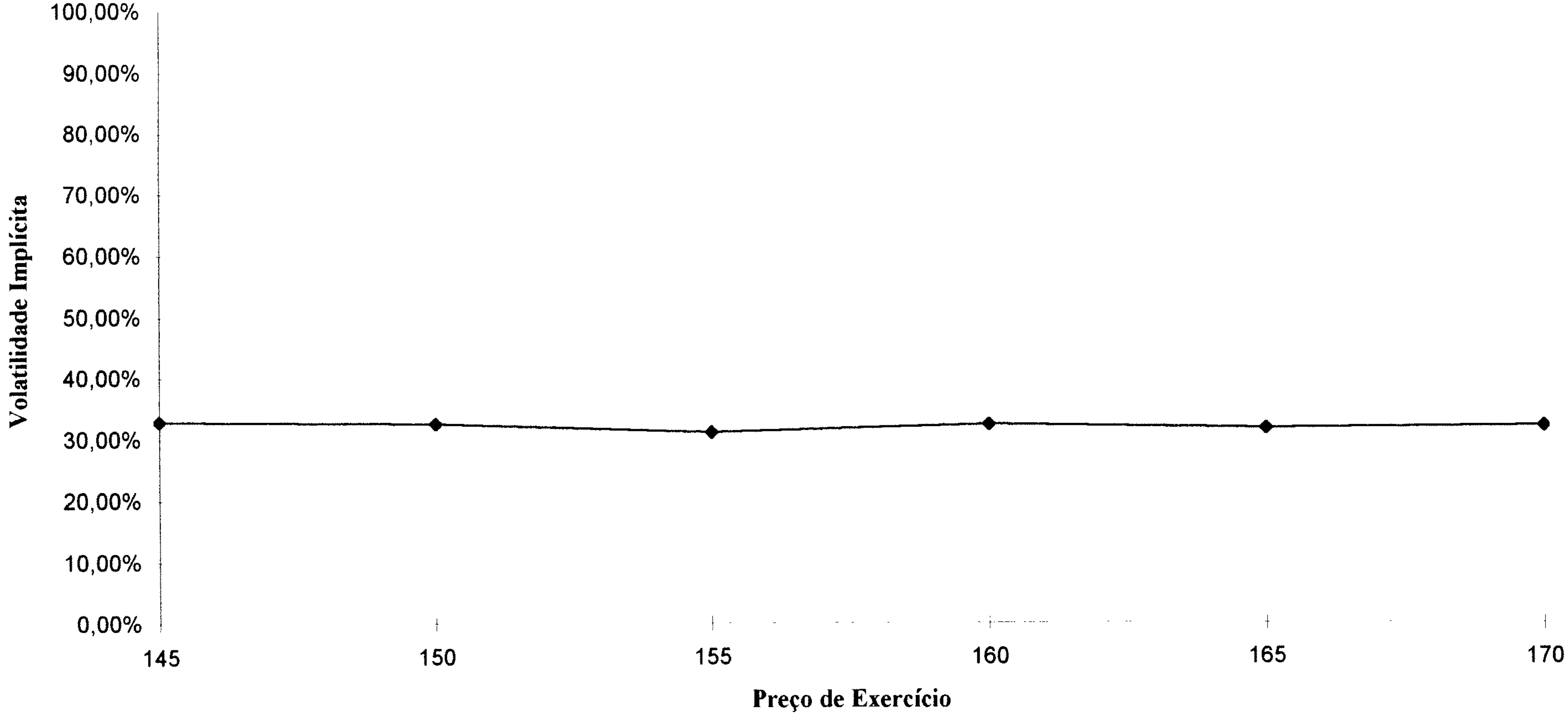


Gráfico 6 - Volatilidade Implícita das opções de compra de TELEBRÁS PN com mesma data de vencimento e diferentes preços de exercício após o pregão BOVESPA do dia 19/06/97

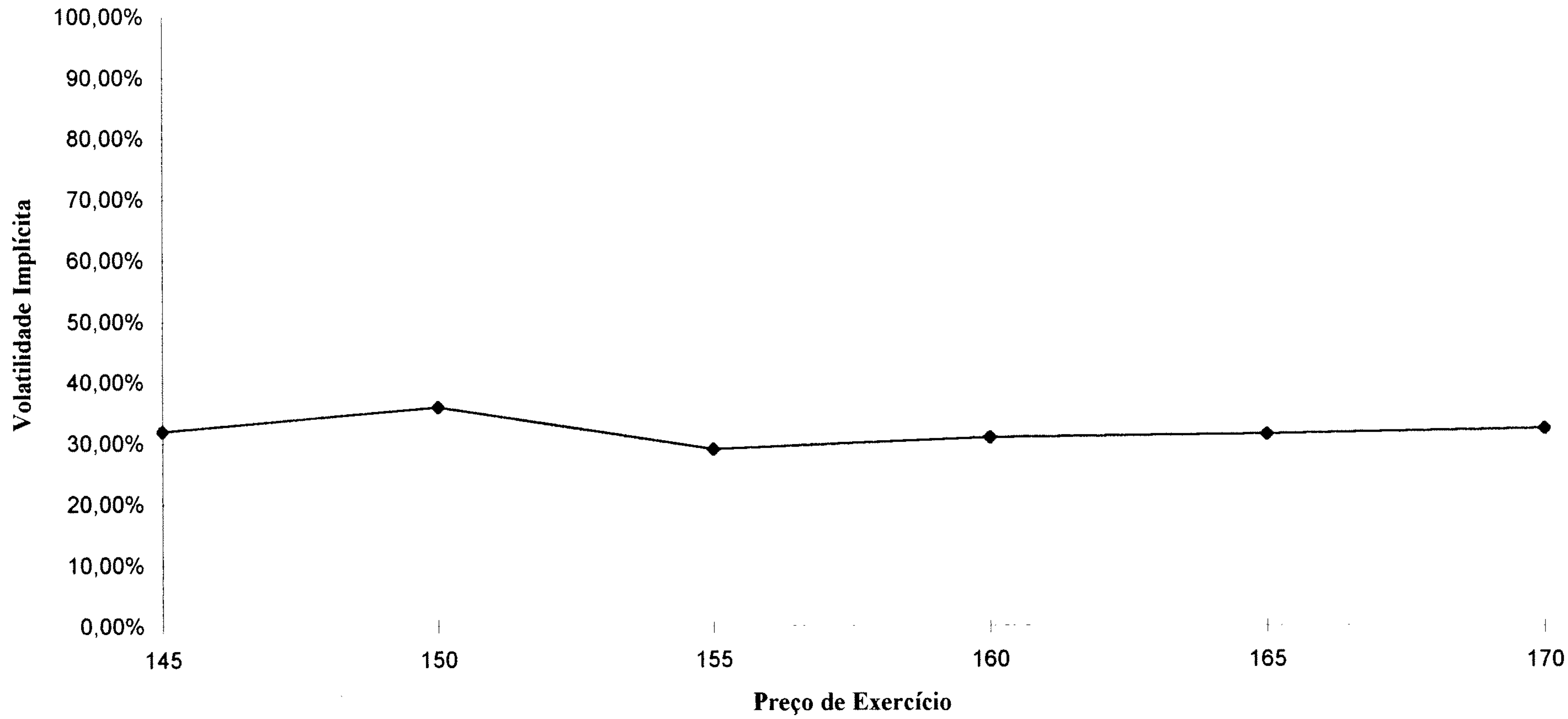


Gráfico 7 - Volatilidade Implícita das opções de compra de TELEBRÁS PN com mesma data de vencimento e diferentes preços de exercício após o pregão BOVESPA do dia 20/06/97

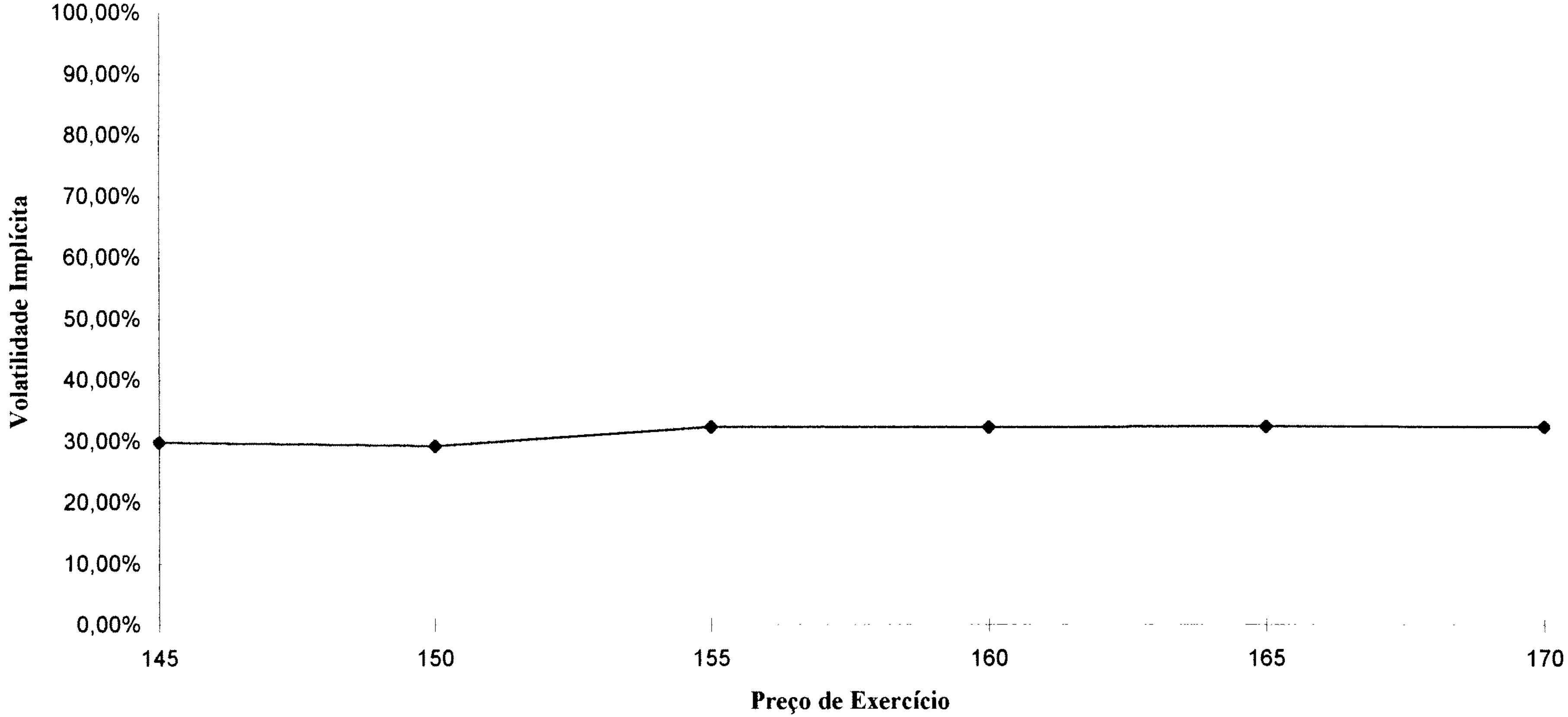


Gráfico 8 - Volatilidade Implícita das opções de compra de TELEBRÁS PN com mesma data de vencimento e diferentes preços de exercício após o pregão BOVESPA do dia 16/06/92

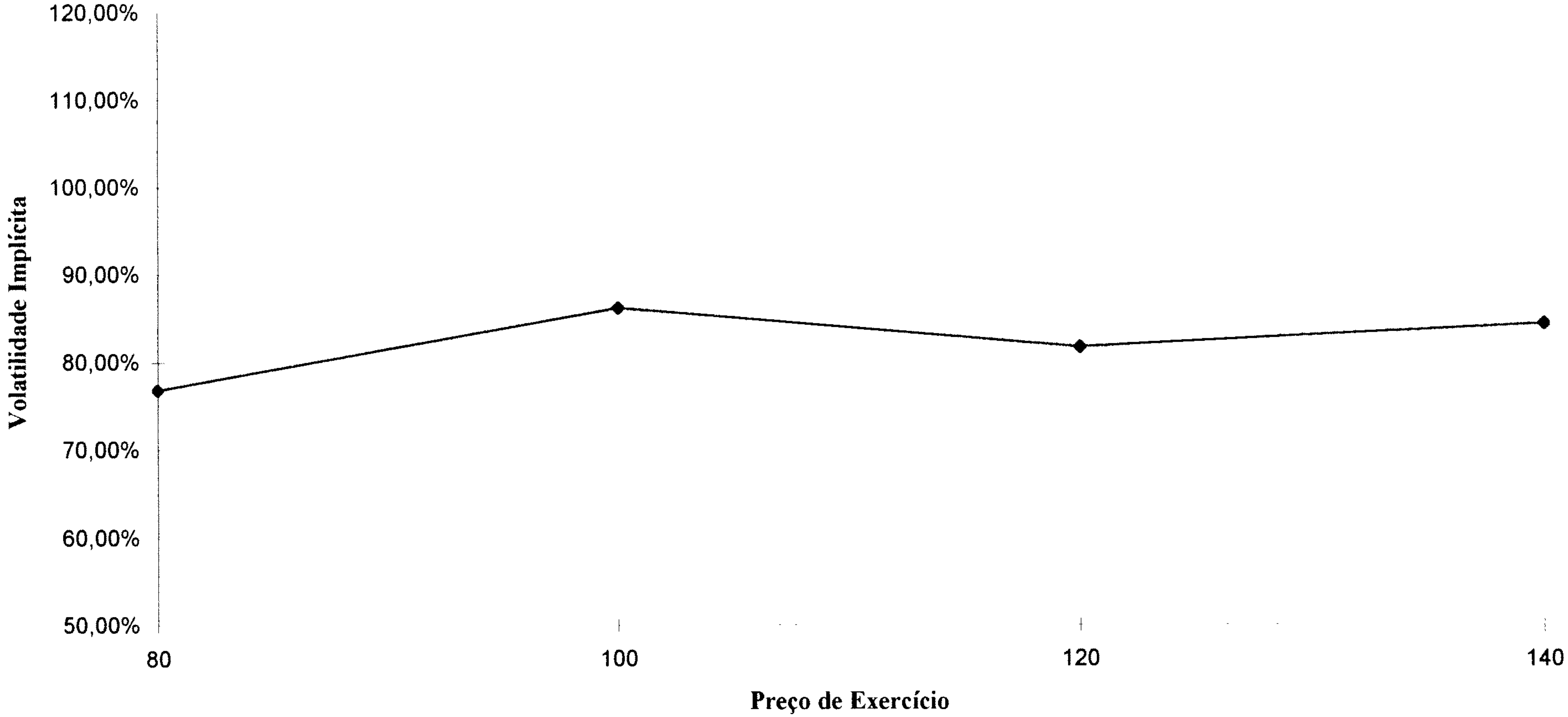


Gráfico 9 - Volatilidade Implícita das opções de compra de TELEBRÁS PN com mesma data de vencimento e diferentes preços de exercício após o pregão BOVESPA do dia 17/06/92

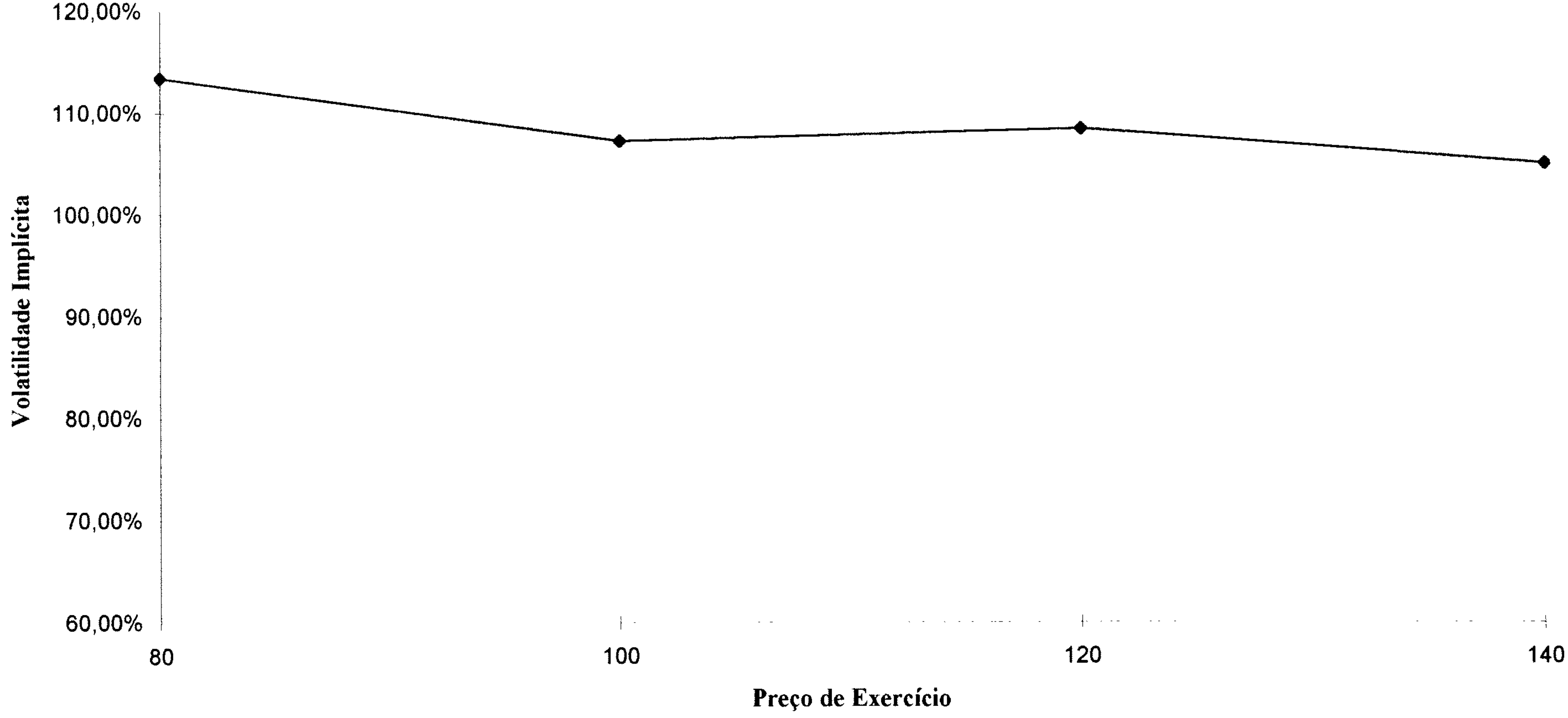


Gráfico 10 - Volatilidade Implícita das opções de compra de TELEBRÁS PN com mesma data de vencimento e diferentes preços de exercício após o pregão BOVESPA do dia 19/06/92

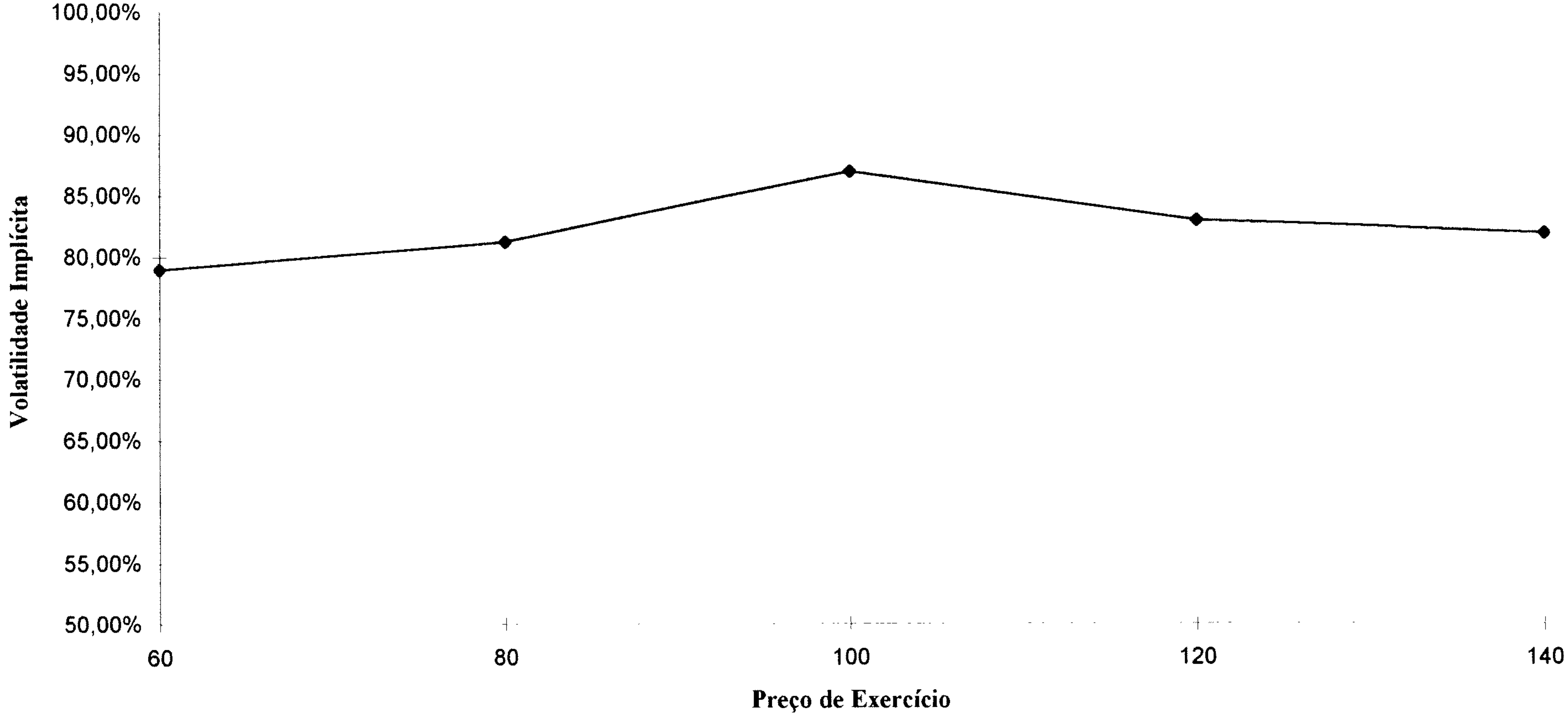


Gráfico 11 - Volatilidade Implícita das opções de compra de TELEBRÁS PN com mesma data de vencimento e diferentes preços de exercício após o pregão BOVESPA do dia 22/06/92