PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

UM EXEMPLO DE EQUILÍBRIO GERAL COM INADIMPLÊNCIA

Declaro que o presente trabalho é de minha autoria e que não recorri para realizá-lo, a nenhuma forma de ajuda externa, exceto quando autorizado pelo professor tutor.

Bernardo Coutinho de Sampaio
No. de Matrícula : 0212330 – 4

Orientador : Juan Pablo Torres-Martínez

Junho 2005

" As opiniões expressas neste trabalho são de responsabilidade única e exclusiva do autor."

Agradecimentos

Agradeço ao Professor Juan Pablo Torres-Martínez pela dedicação, paciência e empenho durante a orientação desta monografia.

Agradeço também a todos os demais professores e funcionários do departamento de economia da PUC-Rio que estiveram presentes e participaram de minha formação nestes últimos anos.

Agradeço a todos as demais pessoas, amigos e família, que compartilharam e me apoiaram durante este período de minha vida.

Índice

Introdução

O modelo clássico de equilíbrio geral tem como sua principal característica, o fato de que as forças de mercado e as escolhas dos indivíduos sempre geram alocações de equilíbrio Pareto eficientes na existência de mercados completos. Isto é, cada agente agindo individualmente sem qualquer preocupação com o bem estar de toda a sociedade, acaba produzindo um resultado final eficiente onde nenhum agente pode melhorar sua condição sem o que o outro necessariamente piore. Neste modelo, os preços dos bens se ajustam perfeitamente para que a oferta iguale a demanda, de modo que dados estes preços cada agente maximiza sua utilidade para gerar uma alocação Pareto eficiente. Dessa forma, está implícito no modelo um mundo onde os agentes cumprem todas as suas promessas e não há qualquer forma de inadimplência. Neste mundo, também supomos que os mercados sejam completos, e que existem todos os tipos de ativos disponíveis para compra e venda.

A criação de um modelo que incorpore ao modelo básico de equilíbrio geral diversas características do mundo real pode, então, apresentar importantes *insights* sobre o funcionamento dos mercados. Condições como a incerteza sobre o estado de natureza futuro, a inadimplência nos mercados financeiros e um número finito de tipos de ativos disponíveis para serem transacionados, apresentam dificuldades para a obtenção de um resultado tão perfeito como no modelo clássico.

Neste trabalho será explorada a possibilidade de um mercado não produzir uma alocação de equilíbrio eficiente no sentido de Pareto. Para introduzir esta condição no modelo vamos supor que os agentes não são obrigados a cumprir suas promessas, ou seja, eles apenas o farão se isso lhes for vantajoso. Portanto, pretende-se desenvolver um modelo de equilíbrio geral que incorpora esta característica de inadimplência dos agentes.Vamos supor também, um mundo onde os agentes não possuem informação completa para fazer suas escolhas.

No entanto,os modelos de equilíbrio geral apresentam um grave problema. Na medida em que mais variáveis e/ou períodos são incluídos no modelo com o objetivo de torná-lo mais realista, os cálculos necessários para se resolver o problema de otimização e alcançar um exemplo numérico se tornam cada vez mais problemáticos. A complexidade envolvida nos cálculos torna difícil a execução de estática comparativa para se analisar os resultados obtidos. Portanto, modelos de equilíbrio geral ficam restritos a uma simplicidade excessiva pela complexidade matemática.

A finalidade deste trabalho será exemplificar e demonstrar de forma clara e precisa uma maneira alternativa para o desenvolvimento de exemplos numéricos em modelos de equilíbrio geral. Desta forma, pretendemos evitar, ou ao menos amenizar, as dificuldades numéricas impostas pelos sistemas de otimização. A introdução de suposições sobre uma suposta solução de equilíbrio será utilizada para a resolução do problema. Deste modo, o problema de otimização será resolvido de maneira retroativa, ou seja, partindo da alocação final para se chegar as condições que deram origem a esta resolução.

O modelo que será explicado e analisado a seguir foi inicialmente proposto por Geanakoplos e Zame (1995). O modelo desta monografia é uma versão modificada deste original para que se possa alcançar os objetivos propostos.

1- Características Gerais

O modelo mais simples de equilíbrio geral é constituído por dois agentes que efetuam trocas em busca de maximizar sua utilidade. Neste modelo, existe apenas um período. Os agentes recebem suas dotações e efetuam trocas, mas não há qualquer continuação ou tempo futuro. Por só existir um período, não há um mercado financeiro que venda ativos. A partir deste primeiro modelo, serão incorporadas características para que se possa alcançar uma situação mais real onde seja possível analisar efeitos como a inadimplência no resultado final.

1.1 - Tempo e Incerteza

A estrutura temporal do modelo será composta por 2 períodos, período 0 e período 1. O período 0 será conhecido como o tempo presente, e o período 1 será o visto como o futuro. Os agentes terão pleno conhecimento sobre qual é o estado de natureza no presente, mas não terão certeza sobre quais serão as condições no futuro. Ou seja, os agentes não terão conhecimento de qual será o estado de natureza vigente no futuro. Para lidar com este fato, os agentes associarão a cada estado de natureza (n) possível uma probabilidade k_i, onde:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = 1$$

O presente terá apenas um estado de natureza, conhecido como S_0. Neste período, como foi mencionado anteriormente, não há nenhuma incerteza associada e os agentes possuem informação completa.

No futuro, consideraremos que existem 2 estados de natureza possíveis: S_1 e S_2. Para cada estado de natureza os ambos agentes associarão uma mesma probabilidade. Supondo que o estado de natureza S_1 ocorre com probabilidade k_1, e dado que $k_1 + k_2 = 1$, o estado de natureza S_2 ocorrerá com probabilidade de $(1 - k_1)$.

O valor de k_i deve ser diferente de 0 e 1. Ou seja, $0 < k_i < 1$. Caso o valor de k_i fosse igual a 1, o agente teria certeza de que tal estado de natureza ocorreria no futuro e portanto, eliminaria a incerteza. No caso de k_i ser igual a zero, o agente teria certeza que o outro estado de natureza ocorreria.

Portanto, apesar de possuírem informação completa hoje os agentes terão que incorporar às decisões de consumo hoje, a incerteza sobre qual será o estado de natureza vigente no futuro.

1.2 - Bens e Depreciação

Neste modelo, consideraremos que existe apenas um bem disponível para consumo. Os agentes receberão dotações deste bem no início de cada período e efetuarão trocas entre si. Este bem será conhecido como x.

Este único bem terá a característica de ser durável. Ou seja, quando passamos de um período para outro, este bem não se extinguirá. Ao ser consumido no período 0, o bem conservará uma parcela do seu valor para o período 1. Esta parcela, que será chamada de M, equivale a quanto do bem consumido no período 0 estará disponível para consumo no período 1. Portanto, M deve ter seu valor entre 0 e 1. Analogamente, o valor $(1 - M)$ deve ser entendido como a depreciação sofrida pelo bem ao longo do tempo, o valor perdido. Portanto, M deve respeitar a seguinte condição:

$$0 < M < 1$$

O fato de M ter seu valor estritamente maior que zero virá a ser fundamental para que possamos introduzir o uso de colateral para garantir promessas, como será visto a seguir. M não pode assumir valores maiores que 1, pois, em nosso modelo o bem não aumentará de quantidade após ser consumido. M não assume valor igual a 1 pois, nesse caso, não haveria depreciação, dado que o valor integral do bem seria conservado para o período seguinte. Apesar de estarmos considerando que M tem seu valor estritamente menor do que 1 nem todos os modelos de equilíbrio geral tem esta característica. Modelos que incorporam tecnologias de produção podem assumir que M seja maior ou igual a 1.

Por ser este o único bem desta economia, seu preço será considerado o numerário e terá seu valor fixado em 1.

1.3 - Ativos e Colateral

Um ativo garantido por colateral é definido como um par (A,C), onde A é uma promessa de pagamento futuro ou um valor de face, e C é a quantidade de bens que será usada como colateral para garantir o cumprimento do contrato. O preço do ativo no período 0, será definido por q. O ativo no período 1 não é transacionado e tem seu preço igual a 0, por não existir um terceiro período onde se possa efetuar os pagamentos prometidos pelo ativo. Consideraremos que existe apenas um ativo disponível para compra em nossa economia.

Um ativo comprado em S_0, determina que no período 1, o agente que vendeu o ativo, faça uma entrega A ao agente que comprou o ativo, ou em caso de *default*, que seja entregue o valor depreciado do colateral envolvido.

Dessa forma, o agente que vendeu o ativo no período 0 se depara com uma escolha no período seguinte. Ele deve escolher entre pagar o que foi prometido no período 0, ou aplicar um *default* e entregar o colateral envolvido na transação. Portanto, o retorno do ativo dependerá da escolha feita por este indivíduo. Para cada estado de natureza i, o ativo processa o pagamento A_i, no entanto, exigirá sempre um mesmo nível de colateral C.

Assim sendo, teremos que o pagamento (R) do ativo será definido como:

$$R_i = \text{Min}\ \{ A_i, M.C \}\ ;\ \text{para cada estado de natureza i}$$

Neste momento, a condição de que M seja estritamente maior do que 0 se mostra fundamental para a construção do modelo. Caso M fosse igual a zero e o bem se extinguisse após o consumo em S_0, ou seja, sofresse depreciação completa, o valor do colateral também seria igual 0. As promessas feitas na compra de ativos não poderiam ser garantidas por meio de colateral, dado que os agentes sempre optariam por aplicar *default* para qualquer que fosse a quantidade C de colateral usado. O valor de $M.C$ seria sempre igual a 0 no período seguinte. Conseqüentemente, o retorno dos ativos seria sempre 0, dado que nenhum agente efetuaria os pagamentos prometidos e todos iriam optar por aplicar um *default* estratégico, onde os agentes tem condições de efetuar os pagamentos prometidos mas não o fazem por não ser vantajoso. Os agentes compradores de ativos anteciparian essa condição e não seriam feitas transações no mercado financeiro dado que o retorno do ativo seria igual a zero.

O nível de inadimplência é relacionado negativamente com relação ao pagamento prometido. Portanto, precisamos determinar o nível de inadimplência nesta economia para determinarmos o retorno médio dos ativos.

A existência da função Min no retorno dos ativos traz dificuldades operacionais para implementarmos o modelo. Por não ser uma função derivável, os cálculos de otimização não podem ser efetuados para que se faça estática comparativa. Para contornarmos esse problema faremos as seguintes suposições.

- Em S_1; $A_1 < M.C \rightarrow R_1 = A_1$
- Em S_2; $A_2 > M.C \rightarrow R_2 = M.C$

Essas hipóteses implicam que no estado de natureza S_1 os agentes sempre cumprirão suas promessas, dado que o valor do colateral é sempre maior que o valor do pagamento prometido e não seria vantajoso aplicar *default*. Por outro lado, no estado de natureza S_2 os agentes sempre aplicarão *default* e entregarão o colateral prometido, uma vez que o valor do colateral é menor que o da entrega prometida pelo ativo.

1.4 - Agentes e Dotações

A economia deste modelo será composta por dois agentes. No período 0, os agentes irão comprar e vender bens e ativos procurando maximizar suas utilidades. No período 1, os agentes irão comprar e vender bens mais uma vez, além de efetuar os eventuais pagamentos resultantes dos ativos transacionados no período 0. Cada agente estará sujeito apenas a perda do valor depreciado do colateral em caso de *default*. Apesar de penalidades extra-econômicas, como exclusão do mercado de crédito, serem comumente utilizadas no mundo real, estas não serão incorporadas no modelo.

Cada agente tomará suas decisões de consumo procurando maximizar sua utilidade, dentro de suas possibilidades de consumo. Os gastos de cada agente serão então limitados por sua riqueza em cada período. Essa riqueza será a dotação inicial de bens que cada agente recebe no início de cada período, mais eventuais rendas recebidas pela compra de ativos no período anterior. Dados os 3 estados de natureza em nosso modelo: S_0, S_1 e S_2, cada agente *h* receberá a dotação $W_{0,h}$, $W_{1,h}$ e $W_{2,h}$ para cada *S* respectivamente. As dotações devem ser obrigatoriamente maiores que zero para todos os agentes em todos os períodos, pois caso contrário pode não existir equilíbrio. As transferências intertemporais de renda serão feitas no mercado financeiro através da compra e venda de ativos. Desta forma, os agentes poderão distribuir sua renda entre os dois períodos do modo que lhe for mais conveniente. No entanto, os agentes podem não gerar uma alocação eficiente pela existência de mercados incompletos, ou seja, existe apenas um ativo para dois estados de natureza possível no futuro.

2 - Otimização, Utilidade e Restrições

Nesta seção veremos como formular o problema de maximização a ser resolvido. Examinaremos, também, o método de otimização com o objetivo de se chegar as demandas individuais pelo bem em cada estado de natureza e como consequência à alocação final dos recursos. Veremos também quais condições devem ser verdadeiras para que a oferta iguale a demanda em todos os mercados.

2.1 - Utilidade e Restrições Orçamentárias

Cada agente *h* fará escolhas tentando sempre maximizar sua utilidade. Esta operação de maximização será restrita pela renda do agente no período em questão. A utilidade, em nosso modelo, dependerá do consumo em S_0, além da média ponderada do consumo nos dois possíveis estados de natureza futuros multiplicados por um fator de desconto conhecido como β. O parâmetro β deve ser maior do que zero pois caso contrário os agentes não teriam nenhum ganho de utilidade com o consumo no período 1.

Vamos definir a função utilidade do agente *h* como:

$$U^h\,(X_{0,h}, X_{1,h}, X_{2,h}) = \sqrt{X_{0,h}} + \beta\,\{\,k_1 . \sqrt{X_{1,h}} \;+ (1 - k_1)\,\sqrt{X_{2,h}}\,\}$$

Onde X_i corresponde ao consumo no estado de natureza i

As restrições orçamentárias dependem do período em questão e de qual é o estado de natureza vigente. Em S_0, teremos que o consumo do agente *h* neste período mais as compras de ativos neste período (Z_h) serão limitadas pela dotação inicial do agente neste peródo ($W_{0,h}$).

$$X_{0,h} \;+ q.Z_h = W_{0,h}$$

No período 1, o consumo em cada estado de natureza será limitado pelo valor da dotação recebida no período, $W_{i,h}$, o valor depreciado dos bens consumidos no período anterior e o retorno dos ativos transacionados.

Formalizando, teremos:

$$X_{i,h} = W_{i,h} + M.X_{0,h} + R_i .Z_h$$

para i = 1 e 2

No período 0, existe mais uma restrição. Esta restrição diz respeito a quantidade de colateral utilizada pelo agente. O agente não pode endividar-se com colateral em um valor maior que o seu consumo no período 0. Caso contrário, ele não teria como garantir suas promessas por meio de colateral. Desta forma, teremos que:

$$X_{0,h} \geq - C.Z_h$$

Após definidas as restrições a serem respeitadas, nosso problema de maximização está resumido a:

$$Max\ U_h (X_{0,h}, X_{1,h}, X_{2,h})$$

Sujeito a:

- $X_{0,h} + q.Z_h = W_{0,h}$
- $X_{i,h} = W_{i,h} + M.X_{0,h} + R_i .Z_h \ ; para\ i = (1,2)$
- $X_{0,h} \geq - C.Z_h$

Deve-se ter em mente que o preço do bem *x* foi fixado em 1, caso o contrário os valores referentes a consumo e dotação deveriam estar sendo multiplicados pelo preço do bem *x*. A demanda por ativos (Z_h) pode assumir valor positivo ou negativo, dependendo se o agente é um vendedor ou um comprador de ativos

2.2 - Método de Otimização

A otimização da função utilidade será feita através do método dos Multiplicadores de Lagrange. Para implementarmos este método devemos primeiro escrever o Lagrangeano associado ao problema, depois obter as primeiras derivadas e iguala-las a zero, para em seguida resolver o sistema. Uma explicação mais detalhada do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange aplicada a este caso é dada no Apêndice.

O Lagrangeano do problema é a função a ser maximizada, subtraída das restrições multiplicadas por um fator λ_i. Os parâmetros λ_i que multiplicam as restrições do problema são conhecidos como os multiplicadores de Lagrange.

$$L_h(X_{0,h}, X_{1,h}, X_{2,h}, Z_h) = \sqrt{X_{0,h}} + \beta \{ k_1.(\sqrt{X_{1,h}}) + (1 - k_1)(\sqrt{X_{2,h}})\} - \lambda_0 (X_{0,h} + q.Z_h - W_{0,h}) - \lambda_1 (X_{1,h} - W_{1,h} - M.X_{0,h} - R_1 .Z_h) - \lambda_2 (X_{2,h} - W_{2,h} - M.X_{0,h}\ R_2 .Z_h) - \lambda_3(- X_{0,h} - Z_h.C)$$

Agora devemos obter as condições de primeira ordem do lagrangeano. Ou seja, obter a primeira derivada para cada variável da função $L_h(X_{0,h}, X_{1,h}, X_{2,h}, Z_h)$, e iguala-las a zero. Igualando as derivadas a zero e isolando os termos que contêm λ teremos as seguintes equações:

- $\dfrac{\partial L}{\partial X_{0,h}} \rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{X_{0,h}}} = \lambda_0 - \lambda_1.M - \lambda_2.M - \lambda_3$

- $\dfrac{\partial L}{\partial X_{1,h}} \rightarrow \dfrac{\beta.k_1}{2\sqrt{X_{1,h}}} = \lambda_1$

- $\dfrac{\partial L}{\partial X_{2,h}} \rightarrow \dfrac{\beta.(1 - k_1)}{2\sqrt{X_{2,h}}} = \lambda_2$

- $\dfrac{\partial L}{\partial Z_h} \rightarrow 0 = \lambda_0.q - \lambda_1.R_1 - \lambda_2.R_2 - \lambda_3.C$

Encontrando os argumentos que maximizam as utilidades de cada agente, estaremos também encontrando as demandas de cada agente pelo bem dados os preços de equilíbrio.

Para encontrarmos o preço de equilíbrio do ativo (lembremos que o preço do bem foi fixado em 1) temos de determina-lo de modo que a oferta iguale a demanda no mercado de ativos. As condições de equilíbrio para o mercado de bens e o mercado de ativos serão examinadas a seguir.

2.3 - Oferta e Demanda

Para garantirmos que a economia está em equilíbrio é necessário que oferta iguale a demanda em todos os mercados e em todos os períodos. A soma das demandas individuais deve ser igual a oferta total de bens. Esta mesma condição deve ser válida para o mercado de ativos.

Primeiro, vamos analisar os termos no mercado de bens em S_0. A demanda total é composta pela soma das demandas individuais de cada agente pelo bem x. A oferta, por outro lado, será formada pela soma de todas as mercadorias disponíveis para transação. A soma das mercadorias no período S_0 é a soma das dotações iniciais de cada agente. Portanto, a condição de oferta igual a demanda no período 0 pode ser definida como:

$$\sum_{h=1}^{2} X_{0,h} = \sum_{h=1}^{2} W_{0,h}$$

Para analisarmos os períodos seguintes o raciocínio continua sendo o mesmo. O lado da demanda continua sendo o somatório das demandas individuais de cada agente. No entanto, o lado da oferta passa a ser composto por dois termos diferentes. O primeiro termo é exatamente o mesmo do período 0, a soma das dotações individuais de cada agente. O segundo termo passa a ser a soma do valor depreciado do consumo de x em S_0. A razão para que isso ocorra é que por x ser um bem durável, a quantidade consumida em S_0 continua disponível para consumo, mas agora ela não terá seu valor integral e sim seu valor depreciado. Portanto, a condição de equilíbrio do mercado de bens nos estado de natureza S_1 e S_2, pode ser escrita como:

No estado de natureza S_1:

$$\sum_{h=1}^{2} X_{1,h} = \sum_{h=1}^{2} W_{1,h} + M. \sum_{h=1}^{2} X_{0,h}$$

No estado de natureza S_2:

$$\sum_{h=1}^{2} X_{2,h} = \sum_{h=1}^{2} W_{2,h} + M. \sum_{h=1}^{2} X_{0,h}$$

O mercado de ativos financeiros deve ser visto de forma um pouco diferente do mercado de bens. Os agentes escolhem qual parcela da renda eles querem usar no presente e no futuro e realizam essas transferências intertemporais através da compra ou venda de ativos financeiros.

Por exemplo, se o agente 1 prioriza o consumo no período 0, ele se tornará um vendedor de ativos, com a intenção de receber uma renda extra para consumo hoje e efetuando um pagamento no futuro, onde ele não considera o seu consumo tão importante. Agora, o agente 1 poderá consumir no presente mais que o valor de sua dotação inicial. Desta forma, a sua demanda por ativos será negativa.

De modo relativo, o agente 2 poderia priorizar mais o consumo futuro do que o agente 1, e se tornará um comprador de ativos, efetuando assim uma transferência de renda de hoje para o futuro. Com isso, teríamos que a sua demanda por ativos será positiva.

Por só existirem dois agentes nesta economia, a quantidade vendida por um agente deve ser necessariamente igual a quantidade comprada pelo outro, para que, desse modo, qualquer aumento de demanda tenha em contrapartida um aumento de oferta. Portanto, teremos que respeitar a seguinte condição

$$\sum_{h=1}^{2} Z_h = 0$$

Dessa forma, podemos observar que para o mercado de ativos estar em equilíbrio, e para que não haja qualquer excesso de oferta ou de demanda, o preço q deve se ajustar para que a condição acima seja satisfeita.

Portanto, a exigência de que oferta iguale a demanda em todos os mercados, pode ser resumida nas seguintes equações:

$$\sum_{h=1}^{2} X_{0,h} = \sum_{h=1}^{2} W_{0,h}$$

$$\sum_{h=1}^{2} X_{1,h} = \sum_{h=1}^{2} W_{1,h} + M. \sum_{h=1}^{2} X_{0,h}$$

$$\sum_{h=1}^{2} X_{2,h} = \sum_{h=1}^{2} W_{2,h} + M. \sum_{h=1}^{2} X_{0,h}$$

$$\sum_{h=1}^{2} Z_{h} = 0$$

3- Desenvolvimento de Exemplos

O objetivo desta seção é construir, passo a passo, um exemplo numérico para o modelo desenvolvido nas seções anteriores. Nosso simples modelo com dois agentes, um bem, um ativo e dois períodos gerou um sistema de 8 equações (4 equações do Lagrangeano e 4 das condições de oferta e demanda) para ser resolvido. Caso fossem incluídos mais elementos o problema se tornaria cada vez mais complexo tornando mais difícil e custosa a obtenção de exemplos numéricos.

3.1 - Suposições

A criação de um exemplo consiste em encontrarmos as alocações de equilíbrio, para um certo nível de dotações dos agentes. As dotações iniciais, que são definidas exógenamente, determinam como os agentes se comportam, e portanto, definem junto com suas utilidades, as decisões de consumo e de compras de ativos.

O modo pelo qual alcançaremos a solução de nosso problema será um pouco diferente. O problema será abordado de maneira inversa. Primeiramente, serão feitas suposições sobre uma hipotética solução de equilíbrio desejada. Em seguida, tentaremos determinar qual o valor das dotações iniciais para alcançar nossa solução proposta. O processo, no entanto, consiste também em identificar as condições que precisam ser respeitadas para que seja possível alcançar nossa solução de equilíbrio. Essas condições serão valores que os parâmetros do modelo terão de respeitar. Finalmente, todas as variáveis endógenas estarão sendo expressas em função dos parâmetros do modelo, sendo que estes estarão sujeitos as imposições necessárias.

Primeira Suposição:

Nossa suposta solução de equilíbrio terá a seguinte característica. Os 3 primeiros multiplicadores de Lagrange terão o mesmo valor e a restrição de colateral não será ativa em nossa solução de equilíbrio. Isto implica que:

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 \text{ e } \lambda_3 = 0$$

Desse modo, podemos re-ordenar os termos das condições de primeira ordem do lagrangeano e substituir todos os demais λ_i por λ_0 para obter:

- $\dfrac{\partial L}{\partial X_{0,h}} \rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{X_{0,h}}} = \lambda_0 . (1 - 2.M) \rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{X_{0,h}}} \dfrac{1}{1 - 2M} = \lambda_0$

- $\dfrac{\partial L}{\partial X_{1,h}} \rightarrow \dfrac{\beta . k_1}{2\sqrt{X_{1,h}}} = \lambda_0$

- $\dfrac{\partial L}{\partial X_{2,h}} \rightarrow \dfrac{\beta .(1 - k_1)}{2\sqrt{X_{2,h}}} = \lambda_0$

- $\dfrac{\partial L}{\partial Z_h} \rightarrow 0 = \lambda_0 . q - \lambda_0 . R_1 - \lambda_0 . R_2 \rightarrow q = R_1 + R_2$

Agora, para continuarmos a desenvolver nosso modelo, devemos introduzir uma segunda condição.

Segunda Suposição:

A nossa alocação de equilíbrio terá uma demanda no primeiro período igual a 1 para ambos os agentes. Ou seja, devemos determinar os outros parâmetros para que a seguinte condição seja verdade:

$$X_{0,h} = 1 \text{ para h} = 1,2$$

Agora, podemos facilmente encontrar as demandas para os demais estados de natureza. Igualando as duas primeiras condições de primeira ordem teremos:

$$\frac{1}{2\sqrt{X_{0,h}}} \frac{1}{(1-2.M)} = \frac{\beta . k_1}{2\sqrt{X_{1,h}}}$$

Portanto teremos que a demanda no estado S_1 será igual a:

$$X_{1,h} = \beta^2 . (k_1)^2 . (1 - 2.M)^2$$

Igualando a primeira e a terceira condições, podemos encontrar a demanda no estado S_2, que por analogia teremos:

$$\frac{1}{2\sqrt{X_{0,h}}} \cdot \frac{1}{(1 - 2.M)} = \frac{\beta.(1 - k_1)}{2\sqrt{X_{2,h}}}$$

E a demanda para o estado de natureza S_2 será:

$$X_{2,h} = \beta^2 \, . \, (1 - k_1)^2 \, . \, (1 - 2.M)^2$$

Como estamos supondo que as funções utilidades são iguais, assim como as restrições do problema de maximização, pode-se observar que os resultados obtidos para o agente 1 são igualmente válidos para o agente 2.

3.2 - Imposições aos Parâmetros da Demanda

Em nosso modelo, não podemos ter demandas por bens iguais a zero ou demandas negativas. Por esta razão, devemos atribuir algumas características aos parâmetros para que não tenhamos demandas desse tipo.

A demanda dos agentes no período 0 é, por definição, igual a 1 e não é necessário fazer qualquer imposição para que esta seja estritamente maior que zero.

O parâmetro β teve seu valor definido como sendo estritamente maior do que zero. Caso contrário, os agentes não teriam qualquer ganho de utilidade com o consumo no período 1. Pode-se verificar isto ao analisarmos as demandas individuais no período 1, ambas seriam iguais a zero se β fosse 0. Portanto, β deve respeitar a seguinte condição:

$$\beta > 0$$

A probabilidade k_1 foi definida como tendo seu valor entre 1 e 0. Dado que k_1 tem seu valor contido neste intervalo, o valor de $(1 - k_1)$ está obrigatoriamente contido no mesmo intervalo. Portanto, não é necessário fazer qualquer outra imposição ao valor de k_1 para que as demandas sejam diferentes de 0.

Com relação ao parâmetro M, para que as demandas sejam diferentes de 0, a seguinte condição deve ser satisfeita.

$$(1 - 2.M) > 0$$

Dado que esta condição deve ser verdadeira e M foi definido como possuindo valor entre 0 e 1, M deve assumir um valor, tal que:

$$0 < M < \frac{1}{2}$$

A próxima conclusão vem da quarta condição de primeira ordem. Ao supormos que todos os λ são iguais, obtivemos que o preço do ativo (q) é a soma dos retornos nos diferentes estados de natureza S_1 e S_2.

A hipótese inicial que introduzimos na seção 1.3, torna-se fundamental para determinarmos o preço q. Nossa hipótese dizia que no estado de natureza S_1, os agentes sempre cumpriam suas promessas e efetuavam o pagamento prometido dos ativos transacionados no período anterior. No estado de natureza S_2, os agentes sempre aplicariam o *default*, e portanto, não pagariam os valores prometidos mas seriam punidos com perda do valor depreciado do colateral envolvido na transação.

Portanto, nossa hipótese implicava que:

$$R_1 = A_1 \text{ e } R_2 = M.C$$

O preço do ativo no período 0 será dado por:

$$q = A_1 + M.C$$

3.3 - Restrições nos Portfólios e Condições de Equilíbrio

No tópico anterior vimos qual formato que as demandas de cada agente devem ter para alcançarmos nosso equilíbrio desejado. Para que fosse possível alcançar um resultado foram necessárias a introdução de diversas hipóteses e suposições.

Nesta seção, veremos quais condições serão necessárias para que possamos obter dotações que façam com que oferta iguale a demanda no mercado agregado.

Para que oferta iguale a demanda no período 0 a seguinte igualdade deve ser mantida:

$$\sum_{h=1}^{2} X_{0,h} = \sum_{h=1}^{2} W_{0,h}$$

Ao re-escrevermos a equação na forma extensa, re-ordenarmos os termos para isolarmos as dotações e substituirmos q pelo seu valor encontrado na seção anterior, teremos:

$$W_{0,1} + W_{0,2} = X_{0,1} + X_{0,2} + (A_1 + M.C + C).Z_1 + (A_1 + M.C + C).Z_2$$

Os termos $X_{0,1}$ e $X_{0,2}$ foram definidos como sendo iguais a 1, já que são o consumo dos agentes no período 0. Em nossa alocação de equilíbrio, vamos supor que o agente 1 está vendendo ativos com o objetivo de ampliar seu consumo no período 0. Dessa forma, ele está transferindo renda do futuro para o presente. Portanto, o valor de Z_1 será negativo. Para que a condição de equilíbrio no mercado de ativos seja satisfeita, temos que a soma da demanda dos agentes por ativos deve ser igual a zero, como vimos na seção 2.3. Portanto, estamos introduzindo um choque positivo na dotação de um agente, e em contrapartida um choque negativo no outro para que eles busquem o mercado financeiro para melhorar sua situação.

Para obtermos equilíbrio no período 0, temos de ter que:

$$W_{0,1} + W_{0,2} = 1 + 1 + (A_1 + M.C).Z_1 - (A_1 + M.C).Z_1$$

Ou seja:

$$\sum_{h=1}^{2} W_{0,h} = 2$$

Para simplificarmos a notação, pode-se chamar de Z, a quantidade de ativos transacionada na economia. Então, as dotações de cada agente podem ser expressas por:

$$W_{0,1} = 1 - (A_1 + M.C).Z$$

$$W_{0,2} = 1 + (A_1 + M.C).Z$$

Desta forma, estamos garantindo que oferta iguale a demanda no mercado de bens no período 0 e no mercado de ativos. Na seção 1.4, definimos que as dotações devem ser todas estritamente positivas. Portanto, devemos obedecer esta condição.

A equação referente ao agente 2 não traz problemas já que trata-se da soma de dois termos positivos. Não é necessária qualquer imposição aos parâmetros. Na equação da dotação do agente 1, para termos, $W_{0,1} > 0$, o parâmetro Z deve respeitar a seguinte condição:

$$Z < \frac{1}{(A_1 + M.C)}$$

Agora nos resta fixar as dotações no período 1 para que oferta iguale a demanda. Para isso ocorrer, as equações descritas na seção 2.3 devem ser satisfeitas:

No estado de natureza S_1:

$$\sum_{h=1}^{2} X_{1,h} = \sum_{h=1}^{2} W_{1,h} + M. \sum_{h=1}^{2} X_{0,h}$$

Cada agente terá seu consumo limitado pela restrição orçamentária, então, sabemos que as demandas individuais de cada agente podem ser escritas como:

$$X_{1,1} = W_{1,1} + M.X_{0,1} + R_1 .Z_1$$

$$X_{1,2} = W_{1,2} + M.X_{0,2} + R_1 .Z_2$$

Re-ordenando os termos a fim de isolar W, e trocando todas as incógnitas por parâmetros já conhecidos, teremos:

$$W_{1,1} = \beta^2. (k_1)^2.(1 - 2.M)^2 \; - \; M + A_1. Z$$

$$W_{1,2} = \beta^2.\,(k_1)^2.(1 - 2.M)^2 \; - \; M - A_1.\,Z$$

Agora, devemos verificar quais condições são necessárias para que as dotações sejam maiores que zero. Na segunda equação, temos que para $W_{1,2}$ ser maior que zero, Z deve possuir um valor tal que:

$$M + A_1.\,Z_1 < \beta^2.\,(k_1)^2.(1 - 2.M)^2$$

$$Z < \frac{\beta^2.\,(k_1)^2.(1 - 2.M)^2 \; - \; M}{A_1}$$

Pode se verificar que a única diferença entre as dotações dos agentes é o sinal do termo $A_1.Z$. Enquanto agente 1 estará efetuando os pagamentos referentes aos ativos adquiridos, o agente 2 estará recebendo estes pagamentos e poderá consumir mais do que sua dotação inicial. Podemos deduzir que a dotação do agente 2 deve ser obrigatoriamente menor que a dotação do agente 1, já que o agente 1 possui uma maior quantidade de renda no período 1 para poder efetuar tais pagamentos. Portanto, não é necessário fazer mais nenhuma imposição para garantirmos que $W_{1,1}$ seja maior que zero porque ao garantirmos que $W_{1,2}$ é maior que zero, $W_{1,1}$ também terá esta propriedade.

No estado de natureza S_2, temos uma situação exatamente análoga. A única diferença entre os dois estados é que, os agentes não pagarão pelo ativo o valor prometido e irão aplicar *default*. Portanto, basta substituir o retorno A_1 por $M.C$ para obtermos as dotações iniciais de cada agente neste estado de natureza. Neste caso, também devemos trocar k_1 por $(1 - k_1)$ devido a mudança na probabilidade associada a cada estado de natureza.

$$W_{2,1} = \beta^2.\,(1 - k_1)^2.(1 - 2.M)^2 \; - \; M + M.C.\,Z$$

$$W_{2,2} = \beta^2.\,(1 - k_1)^2.(1 - 2.M)^2 \; - \; M \; - \; M.C.\,Z$$

Mais uma vez, devemos impor restrições a Z para que as dotações iniciais sejam maiores que zero. Para garantirmos que $W_{2,2}$ seja maior que zero devemos ter que:

$$M + M.C.\ Z < \beta^2.\ (1 - k_1)^2.(1 - 2.M)^2$$

$$Z < \frac{\beta^2.\ (1 - k_1)^2.(\ 1 - 2.M)^2\ -\ M}{M.C}$$

Com relação a primeira equação temos uma situação exatamente igual a do estado de natureza S_1. Como o agente 2 está recebendo uma transferência de renda para compor sua renda total, sua dotação será obrigatoriamente menor que a do agente 1 já que o consumo de ambos é o mesmo. Ao garantirmos que $W_{2,2}$ é maior que zero estaremos garantindo automaticamente que $W_{2,1}$ também é maior que zero. Basta olharmos o sinal do termo $M.C.Z$ e termos em mente que este é positivo na equação referente a dotação do agente 1 para tirarmos esta conclusão.

Entretanto, Z está sujeito a mais uma restrição. Quando introduzimos a primeira suposição, a restrição de colateral não deveria ser ativa em nossa solução de equilíbrio. Para que isto ocorra Z terá de respeitar a condição a seguir:

$$X_{0,h} > -\ C.Z_h$$

Lembremos que $X_{0,1} = X_{0,2} = 1$ e que se para um dos agentes a demanda por ativos será positiva, a demanda do outro agente será positiva. Não é necessário qualquer condição para o agente que compra ativos dado que para este agente Z_h é maior que zero e a condição é satisfeita automaticamente. No entanto, para o tomador de empréstimos, Z_h será negativo. Assim a quantidade de ativos transacionados na economia será restrita por:

$$Z < \frac{1}{C}$$

Portanto, definimos que Z está restrito a essas 4 condições descritas anteriormente. Ao juntarmos, todas as condições obtidas na seção 3.2 com estas obtidas nesta seção, temos todas as restrições que nossos parâmetros devem respeitar a fim de obtermos a solução proposta.

3.4 - Restrições aos Parâmetros

Podemos resumir nossas restrições derivadas nas duas seções anteriores nas seguintes equações:

1. $\beta > 0$

2. $0 < k_1 < 1$

3. $0 < M < \frac{1}{2}$

4. $C > 0$

5. $A_1 < M.C$

6. $A_2 > M.C$

7. $Z < \dfrac{1}{(A_1 + M.C)}$

8. $Z < \dfrac{\beta^2.(k_1)^2.(1 - 2.M)^2 - M}{A_1}$

9. $Z < \dfrac{\beta^2.(1 - k_1)^2.(1 - 2.M)^2 - M}{M.C}$

10. $Z < \dfrac{1}{C}$

4 - Exemplo Numérico

Nesta seção serão atribuídos valores numéricos aos parâmetros. Os valores a serem escolhidos terão que respeitar as condições derivadas anteriormente. Após a determinação do valor para cada parâmetros, chegaremos aos valores que devem ser atribuídos as demais variáveis para que seja alcançada a solução proposta.

O exercicio de estática comparativa será feito ao se modificar o valor de um dos parâmetros, ver qual serão as mudanças nas alocações finais e interpretar estes resultados.

4.1 - Parâmetros Exógenos

Os valores a serem escolhidos devem respeitar as condições resumidas na seção 3.4. Portanto devemos ter cuidado ao escolher esses valores.

O valor de β deve ser obrigatoriamente maior que zero segundo a condição 1. Este parâmetro é o valor de desconto entre o consumo no primeiro e no segundo período. Agentes econômicos, em geral, priorizam mais o consumo no presente do que no futuro. Segue-se então que o valor de β deve ser menor que 1. Desta forma, suporemos que o valor de β é 0,9.

Em nosso modelo, imaginemos que ambos os estados ocorrem com a mesma probabilidade. O valor de k_1 deverá, então, ser igual ao valor de $(1 - k_1)$. Portanto, teremos que o valor de k_1 deve ser igual a 0,5. Note que a condição 2 está sendo respeitada.

A terceira condição determina que M seja estritamente maior que zero e menor que 0,5. Para satisfazer esta condição determinaremos que M será igual a 0,05. Ou seja, o bem x conserva do período 0 para o período 1 apenas 5% do valor integral.

O nível de colateral dos ativos deve possuir valor maior do que zero. Portanto, fixaremos o nível de colateral (C) exigido como sendo 0,5.

Para validarmos nossa hipótese de que os agentes aplicam *default* no estado de natureza S_2 e que efetuam os pagamentos prometidos em S_1 devemos determinar A_1 e A_2 de modo que respeitem as condições 5 e 6.

O valor de A_1 deve ser menor do que o valor de $M.C$ para que a condição 5 seja verdadeira. O valor de $M.C$ é 0,025, portanto fixaremos o valor de A_1 como sendo igual a 0,02.

O valor A_2 deve ser obrigatoriamente maior que $M.C$ para satisfazermos a condição 6. Deste modo, o valor de A_2 será fixado em 0,03.

Deve-se ter em mente que já fixamos alguns parâmetros anteriormente. O preço do bem x foi fixado em 1 em ambos os períodos e o consumo de ambos os agentes foi fixado como sendo igual a 1 no período 0.

4.2 - Consumo no Futuro

Como vimos na seção 3.1, o consumo de ambos os agentes no período 1 será dado pelas equações abaixo, onde h representa o agente 1 ou 2.

No estado de natureza S_1;

$$X_{1,h} = \beta^2 \,.\, (k_1)^2 .\, (1 - 2.M)^2$$

No estado de natureza S_2;

$$X_{2,h} = \beta^2 \,.\, (1 - k_1)^2 .\, (1 - 2.M)^2$$

Como determinamos que k_1 é igual a $(1 - k_1)$, teremos que $X_{1,h} = X_{2,h}$. Desta forma, podemos verificar que o consumo planejaldo de ambos os agentes será igual em ambos os estados de natureza. Portanto, o consumo do agente h no estado de natureza i pode ser obtido substituindo os valores que determinamos aos parâmetros na etapa anterior.

$$X_{i,h} = \beta^2 \,.\, (k_1)^2 .\, (1 - 2.M)^2$$

$$X_{i,h} = (0,9)^2 \,.\, (0,5)^2 .\, (1 - 2.0,05)^2$$

$$X_{i,h} = 0,164$$

Portanto, o vetor de consumo do agente h pode ser escrito como:

$$X_h^* = (X_{0,h}\,;\ X_{1,h}\,;\ X_{2,h}) = (1;\ 0{,}164;\ 0{,}164)$$

4.3 - As Dotações Iniciais

Na seção 3.3, vimos que no período 0 as dotações iniciais que gerariam a solução proposta seriam descritas como:

$$W_{0,1} = 1 - (A_1 + M.C).Z$$

$$W_{0,2} = 1 + (A_1 + M.C).Z$$

No período 1, para o estado de natureza S_1 possível teríamos as seguintes dotações iniciais:

$$W_{1,1} = \beta^2.\ (k_1)^2.(1 - 2.M)^2\ -\ M + A_1.\ Z$$

$$W_{1,2} = \beta^2.\ (k_1)^2.(1 - 2.M)^2\ -\ M - A_1.\ Z$$

No estado de natureza S_2 as dotações seriam:

$$W_{2,1} = \beta^2.\ (1 - k_1)^2.(1 - 2.M)^2\ -\ M + M.C.\ Z$$

$$W_{2,2} = \beta^2.\ (1 - k_1)^2.(1 - 2.M)^2\ -\ M\ -\ M.C.\ Z$$

Podemos verificar que para todas estas equações a única incógnita é o parâmetro Z. Este parâmetro reflete a magnitude do choque que aplicamos as dotações de cada agente para que fossem estimulados a adquirir ativos no mercado financeiro.

Entretanto, o valor de Z deve respeitar as condições 7,8,9 e 10. Substituindo os valores já conhecidos nas restrições de Z, obtemos os seguintes resultados:

$$Z < \frac{1}{(A_1 + M.C)} \rightarrow Z < \frac{1}{(0,02 + 0,025)} \rightarrow Z < 22,22$$

$$Z < \frac{\beta^2.(k_1)^2.(1 - 2.M)^2 - M}{A_1} \rightarrow Z < \frac{(0,9)^2.(0,5)^2.(1 - 2.0,05)^2 - 0,05}{0,02} \rightarrow Z < 5,7013$$

$$Z < \frac{\beta^2.(1 - k_1)^2.(1 - 2.M)^2 - M}{M.C} \rightarrow Z < \frac{(0,9)^2.(0,5)^2.(1 - 2.0,05)^2 - 0,05}{0,025} \rightarrow Z < 4,56$$

$$Z < \frac{1}{C} \rightarrow Z < \frac{1}{0,5} \rightarrow Z < 2$$

Pode se verificar que três destas 4 condições são desnecessárias dado que, uma vez que a quarta proposição é satisfeita, as outras serão automaticamente satisfeitas. Para determinarmos os valores das dotações nos resta apenas escolher Z de modo que: $Z < 2$.

O valor Z será fixado em 1. Portanto, para obtermos os valores das dotações, basta inserirmos os valores dos parâmetros nas equações descritas no início desta seção.

No período 0 teremos os seguintes valores para a dotação dos agentes:

$$W_{0,1} = 1 - (A_1 + M.C).Z \rightarrow W_{0,1} = 1 - (0,02 + 0,025).1 \rightarrow 0,955$$

$$W_{0,2} = 1 + (A_1 + M.C).Z \rightarrow W_{0,1} = 1 + (0,02 + 0,025).1 \rightarrow 1,045$$

No período 1 teremos que para o estado de natureza S_1 as dotações serão:

$$W_{1,1} = \beta^2.(k_1)^2.(1 - 2.M)^2 - M + A_1.Z \rightarrow W_{1,1} = (0,9)^2.(0,5)^2.(1 - 2.0,05)^2 - 0,05 + 0,02 \rightarrow W_{1,1} = 0,134$$

$$W_{1,2} = \beta^2.(k_1)^2.(1 - 2.M)^2 - M - A_1.Z \rightarrow W_{1,2} = (0,9)^2.(0,5)^2.(1 - 2.0,05)^2 - 0,05 - 0,02 \rightarrow W_{1,2} = 0,094$$

No estado de natureza S_2 as dotações serão dadas por:

$$W_{2,1} = \beta^2 . (1 - k_1)^2 .(1 - 2.M)^2 - M + M.C.\ Z \rightarrow W_{2,1} = (0,9)^2.(0,5)^2.(1 - 2.0,05)^2 - 0,05 + 0,025 \rightarrow W_{2,1} = 0,139$$

$$W_{2,2} = \beta^2 . (1 - k_1)^2 .(1 - 2.M)^2 - M - M.C.\ Z \rightarrow W_{2,2} = (0,9)^2.(0,5)^2.(1 - 2.0,05)^2 - 0,05 - 0,025 \rightarrow W_{2,2} = 0,089$$

Agora, podemos representar o vetor de dotações de cada agente. Para o agente 1, teremos o seguinte vetor:

$$W_1^* = (W_{0,1} ; W_{1,1} ; W_{2,1}) = (0,955; 0,134; 0,139)$$

Para o agente 2, o vetor de dotações será:

$$W_2^* = (W_{0,2} ; W_{1,2} ; W_{2,2}) = (1,045; 0,094; 0,89)$$

Em resumo, temos que nossa economia pode ser descrita como:

$$W_1^* = (W_{0,1} ; W_{1,1} ; W_{2,1}) = (0,955; 0,134; 0,139)$$
$$W_2^* = (W_{0,2} ; W_{1,2} ; W_{2,2}) = (1,045; 0,094; 0,89)$$

$$X_1^* = (X_{0,1} ; X_{1,1}; X_{2,1}) = (1; 0,164; 0,164)$$
$$X_2^* = (X_{0,2} ; X_{1,2}; X_{2,2}) = (1; 0,164; 0,164)$$

$$q = 0,045 \qquad Z = 1$$

$$U_1 (X_{0,1} ; X_{1,1}; X_{2,1}) = 1,36447$$
$$U_2 (X_{0,2} ; X_{1,2}; X_{2,2}) = 1,36447$$

Observando estes resultados pode-se verificar o comportamento dos agentes. O agente 1 possui uma pequena renda no presente mas terá uma grande quantidade de renda no futuro. Desta forma, ele busca o mercado financeiro procurando transferir renda do segundo período para o primeiro vendendo ativos. O agente 2 é rico no presente mas não será tão rico no período seguinte, portanto, ele compra ativos financeiros para transferir renda do primeiro para o segundo período.

4.4 - Estática Comparativa

O objetivo desta seção é modificar um dos parâmetros do modelo para verificar qual o resultado na alocação final e comparar com o resultado anterior. O parâmetro escolhido para ser modificado será k_1, ou seja, a probabilidade do estado de natureza S_1 ocorrer. Este parâmetro foi definido como tendo seu valor igual a 0,5, vamos supor agora que a probabilidade deste estado de natureza ocorrer será 0,6. Como k_2 foi definido como 1- k_1, a probabilidade do estado de natureza S_2 ocorrer será de apenas 0,4. Todos os outros parâmetros terão o mesmo valor do exemplo anterior.

Veremos agora como será o consumo ao mudarmos a probabilidade de S_1 ocorrer, onde h representa o agente 1 ou 2:

$$X_{1,h} = \beta^2 \,.\, (k_1)^2 .\, (1 - 2.M)^2$$
$$X_{1,h} = (0,9)^2 \,.\, (0,6)^2 .\, (1 - 2.0,05)^2$$

$$X_{1,h} = 0,2362$$

O consumo no estado de natureza S_2 pode ser calculado da mesma forma. De forma análoga podemos obter:

$$X_{2,h} = \beta^2 \,.\, (1 - k_1)^2 .\, (1 - 2.M)^2$$

$$X_{1,h} = (0,9)^2 \,.\, (0,4)^2 .\, (1 - 2.0,05)^2$$

$$X_{1,h} = 0,1050$$

Agora devemos re-analisar as condições 7,8,9 e 10 para verificarmos se Z pode assumir o mesmo valor do exemplo anterior.

$$Z < \frac{1}{(A_1 + M.C)} \rightarrow Z < \frac{1}{(0,02 + 0,025)} \rightarrow Z < 22,22$$

$$Z < \frac{\beta^2.(k_1)^2.(1 - 2.M)^2 - M}{A_1} \rightarrow Z < \frac{(0,9)^2.(0,6)^2.(1 - 2.0,05)^2 - 0,05}{0,02} \rightarrow Z < 9,31$$

$$Z < \frac{\beta^2.(1 - k_1)^2.(1 - 2.M)^2 - M}{M.C} \rightarrow Z < \frac{(0,9)^2.(0,4)^2.(1 - 2.0,05)^2 - 0,05}{0,025} \rightarrow Z < 2,2$$

$$Z < \frac{1}{C} \rightarrow Z < \frac{1}{0,5} \rightarrow Z < 2$$

Podemos observar que não há problemas em manter Z com seu valor igual a 1.

Agora devemos achar as dotações iniciais que geram esta alocação final. No período 0 teremos os seguintes valores para a dotação dos agentes:

$$W_{0,1} = 1 - (A_1 + M.C).Z \rightarrow W_{0,1} = 1 - (0,02 + 0,025).1 \rightarrow 0,955$$

$$W_{0,2} = 1 + (A_1 + M.C).Z \rightarrow W_{0,1} = 1 + (0,02 + 0,025).1 \rightarrow 1,045$$

No período 1 teremos que para o estado de natureza S_1 as dotações serão:

$$W_{1,1} = \beta^2.(k_1)^2.(1 - 2.M)^2 - M + A_1.Z \rightarrow W_{1,1} = (0,9)^2.(0,6)^2.(1 - 2.0,05)^2 - 0,05 + 0,02 \rightarrow W_{1,1} = 0,2062$$

$$W_{1,2} = \beta^2.(k_1)^2.(1 - 2.M)^2 - M - A_1.Z \rightarrow W_{1,2} = (0,9)^2.(0,6)^2.(1 - 2.0,05)^2 - 0,05 - 0,02 \rightarrow W_{1,2} = 0,1662$$

No estado de natureza S_2 as dotações serão dadas por:

$$W_{2,1} = \beta^2.(1 - k_1)^2.(1 - 2.M)^2 - M + M.C.Z \rightarrow W_{2,1} = (0,9)^2.(0,4)^2.(1 - 2.0,05)^2 - 0,05 + 0,025 \rightarrow W_{2,1} = 0,08$$

$$W_{2,2} = \beta^2.(1 - k_1)^2.(1 - 2.M)^2 - M - M.C.Z \rightarrow W_{2,2} = (0,9)^2.(0,4)^2.(1 - 2.0,05)^2 - 0,05 - 0,025 \rightarrow W_{2,2} = 0,03$$

Em resumo, nossa economia pode ser representada da seguinte forma:

$$W_1^* = (W_{0,1} ; W_{1,1} ; W_{2,1}) = (0{,}955; 0{,}2062; 0{,}0{,}08)$$
$$W_2^* = (W_{0,2} ; W_{1,2} ; W_{2,2}) = (1{,}045; 0{,}1662; 0{,}0{,}03)$$

$$X_1^* = (X_{0,1} ; X_{1,1}; X_{2,1}) = (1; 0{,}2362; 0{,}105)$$
$$X_2^* = (X_{0,2} ; X_{1,2}; X_{2,2}) = (1; 0{,}2362; 0{,}105)$$

$$q = 0{,}045 \qquad Z = 1$$

$$U_1 (X_{0,1} ; X_{1,1}; X_{2,1}) = 1{,}16535$$
$$U_2 (X_{0,2} ; X_{1,2}; X_{2,2}) = 1{,}16535$$

Comparando-se este resultado com o do exemplo anterior, verificamos que quando a probabilidade de um estado de natureza ocorrer aumenta, o consumo neste estado também sobe. Ou seja, os agentes tem mais certeza sobre o estado de natureza futuro e portanto planejam um consumo maior para o estado de maior probabilidade.

Pode-de repetir este exercício para qualquer um dos parâmetros do modelo desde que as condições da seção 3.4 sejam satisfeitas. Desse modo, pode-se observar como agentes econômicos reagem sob diversas condições diferentes, como no exemplo anterior. Apesar destas conclusões, este exercício de estática comparativa não é o ideal. A falta de controle sobre certas variáveis, como as dotações iniciais (nota-se que estas também variam de um exemplo para o outro, tornando mais complicada a análise das alocações finais) e a introdução de hipóteses simplificadoras limitam nossa capacidade de estática comparativa. No entanto, estamos desenvolvendo, de maneira consideravelmente mais rápida e menos trabalhosa, a obtenção de exemplos.

5 - Conclusão

O objetivo principal do trabalho era desenvolver uma metodologia simples para a criação de exemplos numéricos em modelos de equilíbrio geral. A incorporação de variáveis em modelos de equilíbrio gerais tornam os cálculos cada vez mais complicados e de difícil implementação. Apesar da maneira ideal de se analisar os resultados de um modelo seja da forma tradicional, ou seja, resolvendo o problema de otimização e obtendo as demandas individuais. Este método apresenta resultados mais limitados, mas bastante úteis para a análise de alocações de equilíbrio.

Esta monografia demonstrou que através da introdução de hipóteses e da análise do problema de otimização de maneira inversa, torna-se a criação de exemplos mais fácil e prática. Não se faz mais necessário a resolução de grandes sistemas e problemas de otimização para que se alcance um exemplo numérico, basta que se suponha uma solução hipotética e verifique quais condições inicais geram esta solução.

Portanto, a criação de um exemplo, seja para fins ilustrativos ou para o exercício de estática comparativa, pode ser feita sem grandes esforços. O metodologia demonstrada pode ser facilmente implementada a outros modelos mais complexos. Desta forma, não se perde muito tempo e esforço na resolução de sistemas de otimização se o objetivo for obter exemplos numéricos.

Bibliografia

Zame, W.R. e Genakoplos, J. [2002] "Colateral and the Enforcement of Intertemporal Contracts" Yale University Working Paper

Bortolossi, H.J. [2002] "Cálculo Diferencial a Várias Variáveis" Editora PUC-Rio

Varian, H.R. [2003] "Microeconomia – Princípios Básicos" Editora Campus – Sexta Edição

7 - Apêndice

7.1 - O Teorema dos Multiplicadores de Lagrange

O teorema dos multiplicadores de Lagrange afirma para que um dado ponto *p* seja um ponto de máximo é necessário que o vetor gradiente da função objetivo possa ser escrito como uma combinação linear dos vetores gradientes de cada restrição. Ou seja, a soma dos vetores gradientes de cada restrição R_i multiplicada por um número λ_i deve ser igual ao vetor gradiente da função objetivo neste ponto. Estes números λ_i são os multiplicadores de Lagrange.

Se desejamos maximizar uma função de n variáveis $F(x_1,x_2,...,x_n)$ com i restrições R_i, o ponto de máximo deve respeitar a seguinte condição. Onde G_f represena o gradiente da função F e G_{Ri} representa o gradiente de cada restrição.

$$G_f = \lambda_1 G_{R1} + ... + \lambda_i G_{Ri}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1},\frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots ,\frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = \lambda_1\left(\frac{\partial R_1}{\partial x_1}, \frac{\partial R_1}{\partial x_2}, \dots , \frac{\partial R_1}{\partial x_n}\right) + \dots + \lambda_i \left(\frac{\partial R_i}{\partial x_1}, \frac{\partial R_i}{\partial x_2}, \dots , \frac{\partial R_i}{\partial x_n}\right)$$

Dessa forma, teremos um sistema com *n* equações da seguinte forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \lambda_1 \frac{\partial R_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_i \frac{\partial R_i}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \lambda_1 \frac{\partial R_1}{\partial x_2} + \dots + \lambda_i \frac{\partial R_i}{\partial x_2}$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = \lambda_1 \frac{\partial R_1}{\partial x_n} + \dots + \lambda_i \frac{\partial R_i}{\partial x_n}$$

Pode-se verificar que na seção 2.2, esse é o sistema formado pelas condições de primeira ordem do Lagrangeano. Basta verificar que a função objetivo é a função utilidade do agente e as restrições são as restrições orçamentárias e a restrição de colateral.