

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA**

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES PELO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

**Claudine Furtado Anchite
No. de matrícula : 9214580-5**

Orientador: Marco Antonio Bonomo

Julho de 1997

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA**

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES PELO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Claudine Furtado Anchite

**Claudine Furtado Anchite
No. de matrícula : 9214580-5**

Orientador: Claudine Furtado Anchite

Julho de 1997

“As opiniões expressas neste texto são de responsabilidade única e exclusiva do autor “

Agradeço aos comentários e à enorme contribuição de Ruy Monteiro, Jeff Dwyne e a Franklin Golçalves pelos ensinamentos, sem os quais a execução deste trabalho seria impossível.

Índice

0. Introdução	pág.6
I. Movimento dos Preços do Ativo	pág. 8
II. Equação Diferencial de Black - Scholes	pág.14
III. Método das Diferenças Finitas	pág.24
III.I . Aproximação das Diferenças Finitas	pág.25
III.II. Método das Diferenças Finitas Explícito	pág.30
III.III. Método das Diferenças Finitas Implícito	pág.34
III.IV. Método de Crank - Nicholson	pág.37
IV. Implementando o Método das Diferenças Finitas	pág.46
V. Conclusão	pág.60
VI. Apêndice	pág.62
VII. Bibliografia	pág.64

0. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, o mercado de derivativos brasileiro vem se desenvolvendo rapidamente. A BM&F está entre as três maiores bolsas do mundo em volume de negócios, o que mostra que a procura por produtos financeiros modernos é cada vez maior. Hoje, as possibilidades se ampliam, não só em termos de bolsa como também de mercado de balcão, onde são desenvolvidos produtos financeiros dos mais variados de forma a atender exigências de investidores.

Com a estabilização da economia brasileira, a tendência é ainda mais crescente. Juntamente com sofisticados produtos financeiros oferecidos, não só pelas bolsas, como também por instituições financeiras, a demanda por métodos matemáticos mais sofisticados, consistentes e principalmente mais precisos vem se expandindo.

É nesse contexto que se inserem metodologias de precificação de opções. Atualmente algumas metodologias e modelos já estão extremamente difundidos como é o caso do modelo Black - Scholes para precificação de opções *vanilla* do tipo europeu ou a metodologia desenvolvida por Cox-Ross-Rubinstein de árvores binomiais que discretizam processos estocásticos.

No entanto, com a crescente procura por opções com ganho e contrato diferentes da vanilla (compra ou venda) do tipo europeu ou americano, chamadas de opções exóticas, viu-se a necessidade de métodos capazes de precificar tais opções. Contudo, nem sempre há uma solução de fórmula fechada para precificarmos opções, como acontece por exemplo com o modelo de Black - Scholes.

A presente monografia pretende apresentar um método matemático eficiente capaz de modelar derivativos, mais especificamente opções, através de equações diferenciais parciais e aplicá-lo na precificação de certo tipo de opções criadas para o mercado brasileiro.

Na primeira seção, será descrito o processo pelo qual o ativo- objeto da opção, mais precisamente uma ação que se move ao longo do tempo, identificando a equação de movimento do preço do ativo, que é uma das variáveis da qual depende o preço da opção.

Em seguida, mostraremos a equação diferencial parcial de Black - Scholes para o preço da opção. Esta equação se mostrará de suma importância para inúmeros problemas de precificação de opções, já que ela define de como o preço da opção varia em função do preço do ativo - objeto e do tempo.

Posto o problema em forma de equações diferenciais parciais (edp) serão apresentados alguns métodos numéricos para a solução dessas equações.

O cerne da questão consiste em, depois de havermos identificado a equação diferencial parcial que modela a opção e suas condições de contorno, mostrar o método das diferenças finitas como um meio de obtermos solução numérica para a equação diferencial parcial. O presente trabalho pretende mostrar que, através da discretização da equação diferencial parcial pelo método das diferenças finitas, obtemos soluções numéricas bastante precisas.

Numa segunda parte do trabalho, pretende - se fazer uma aplicação desse método para a precificação de opções do tipo bermuda criadas para um ativo do mercado brasileiro. Mais precisamente, tal opção seria uma opção *bermuda* de venda sobre ação de Telebrás. Desta forma, apresentariamos a equação diferencial parcial que modela este tipo de opção com suas condições de contorno, bem como sua solução numérica através do método da diferenças finitas.

I - MOVIMENTO DOS PREÇOS DO ATIVO

Na teoria de precificação de opções, um modelo do movimento do preço do ativo (no caso, mais especificamente, da ação) é uma descrição matemática da relação existente entre o preço corrente da ação e seus possíveis preços futuros. A maioria dos modelos de precificação de opções, cujo ativo-objeto é uma ação, está fundada num simples modelo de movimento aleatório do preço do ativo conhecido como movimento

geométrico browniano. Em outras palavras, é um modelo probabilístico que envolve parâmetros derivados de dados históricos ou do mercado.

O movimento geométrico browniano postula que os retornos futuros de uma ação tem uma distribuição normal e que o desvio-padrão da distribuição pode ser estimado a partir de dados históricos.

Podemos dizer que o modelo do movimento dos preços reflete a chegada de novas informações .

Suponhamos que no tempo t o preço da ação seja S e consideremos que num intervalo de tempo dt o preço da ação mude para $S + dS$. Como modelamos o retorno dS/S ?

O modelo pode ser decomposto em duas partes:

- Uma determinista e previsível : μdt

onde μ representa a taxa média de crescimento do preço da ação (*drift*).¹

- A segunda modela a parcela aleatória no movimento do preço da ação em resposta a efeitos inesperados. Esta parcela é representada por σdZ , onde σ é a volatilidade que mede o desvio-padrão dos retornos. Já a variável Z , por ser uma variável aleatória, tem um comportamento bem característico, denominado processo de Wiener. Este comportamento pode ser bem representado considerando as variações de seu valor em relação a pequenas variações no tempo. Para que dZ siga um processo de Wiener, dZ deve atender a duas propriedades:

- A primeira propriedade é expressa através da equação abaixo que denota a relação existente entre dZ e dt :

$$dZ = \varepsilon\sqrt{dt}$$

onde ε é uma amostra aleatória de uma distribuição normal padronizada, isto é, com média zero e desvio-padrão 1.

- A segunda assinala que os valores de dZ para dois intervalos de tempo dt distintos são independentes, o que significa que, dada a primeira propriedade, dZ tem uma distribuição normal com média zero e variância dt .

Deste modo, os retornos podem ser modelados segundo a equação diferencial estocástica:

$$\frac{dS}{S} = \sigma dZ + \mu dt \quad (1.0)$$

que é a representação matemática do processo que gera o movimento dos preços do ativo.

No mundo real, os preços são cotados em intervalos de tempo discretos. No entanto, em nosso modelo representado em (1.0), dt é um infinitésimo de tempo. Deste

¹ Em modelos mais simples μ é uma constante, por outro lado, em modelos mais complexos μ pode ser uma função de S e t .

modo, seria muito mais eficiente lidar com tempo contínuo onde, no limite, $dt \rightarrow 0$. Obtemos, assim, uma equação diferencial a ser resolvida.

Para tornar tal problema praticável, teremos que apresentar algumas ferramentas para lidar com o termo aleatório dZ :

A primeira seria o lema de Itô, um dos mais importantes resultados obtidos na manipulação de variáveis aleatórias. O lema de Itô relaciona uma pequena variação numa função de uma variável aleatória a uma pequena variação na própria variável e à variação do tempo. O enfoque heurístico do lema de Itô está fundamentado na expansão de Taylor. Assim, dada uma função $f(S,t)$, podemos representar df :

$$df = \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial t} dS dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dt^2 + \dots \quad (1.2)$$

No entanto, em nosso problema descrito acima, temos que S é uma variável aleatória e que dS é representado por:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ \quad (1.3)$$

Aplicando as propriedades que denotam um processo de Wiener, temos:

$$dS = \mu S dt + \sigma S \varepsilon \sqrt{dt} \quad (1.4)$$

Para reduzirmos a expansão de Taylor, devemos estudar os termos de segunda ordem presentes na expansão, ou seja, os termos dS^2 e dt^2 . Primeiramente, dt^2 é de ordem muito pequena, quando dt tende a zero e, portanto, os termos que contém dt^2 podem ser ignorados. No entanto, de (1.4) vemos que :

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 \varepsilon^2 dt + \text{termos de maior ordem em } dt \quad (1.5)$$

tem uma componente em dt que não pode ser ignorada.

Tendo em vista que a variância da distribuição normal padronizada é 1, ou seja, que

$$E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2 = 1$$

podemos deduzir que, uma vez que $E(\varepsilon) = 0$, $E(\varepsilon^2) = 1$. Assim, o valor esperado de $\varepsilon^2 dt$ é dt . Podemos mostrar que a variância de $\varepsilon^2 dt$ é de ordem dt^2 e como resultado disso, $\varepsilon^2 dt$ é um termo não estocástico e este termo é igual ao valor esperado de dt a medida que $dt \rightarrow 0$. Deste modo, quando $dt \rightarrow 0$, o lado direito da equação (1.5) se torna não estocástico e igual a $\sigma^2 S^2 dt$. Assim, a equação (1.2) pode ser reduzida a :

$$df = \frac{df}{dS} dS + \frac{df}{dt} dt + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dS^2} dS^2 \quad (1.6)$$

que representa a equação de movimento de df .²

² J. Hull. *Options, Futures and Other Derivatives*. Pp - 225 - 117.

II - A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE BLACK - SCHOLES

Neste capítulo iremos mostrar a equação diferencial de Black - Scholes e as condições necessárias para podermos resolvê - la. Mostraremos que a equação diferencial de Black - Scholes vêm da aplicação direta do lema de Itô, associada algumas condições de não - arbitragem.

Antes de iniciarmos nossa análise, vamos introduzir algumas premissas que são de suma importância no contexto de precificação de opções :

- A taxa de juros livre de risco r e a volatilidade do ativo σ são funções do tempo conhecidas no decorrer do tempo de vida da opção;
- Não há custos de transação;
- O ativo-objeto não paga dividendos;
- Não há oportunidades de arbitragem;

- Comercialização do ativo pode ocorrer continuamente;
- Venda a descoberto é permitido e o ativo é divisível;

Suponhamos uma opção cujo valor $V(S,t)$ dependa somente do preço do ativo S e do tempo t . (Não é necessário especificar o tipo de opção). Usando o lema de Itô derivado acima, e substituindo o valor de dS (1.0) podemos escrever a equação (1.6) como:

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dZ + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt \quad (2.0)$$

Dando seqüência, construímos um portfólio composto de uma opção e uma quantidade $-\Delta$ do ativo-objeto. O valor deste portfólio é, portanto ;

$$\Pi = V - \Delta S \quad (2.1)$$

A variação nesse portfólio em um dt é :

$$d\Pi = dV - \Delta dS$$

onde Δ é fixo em dt .

Juntando (1.0), (2.0) e (2.1), temos:

$$d\Pi = \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dX + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta S \right) dt \quad (2.2)$$

Podemos eliminar a componente aleatória fazendo

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \quad (2.3)$$

Resultando em um portfólio cujo incremento é totalmente determinístico:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \quad (2.4)$$

O retorno de uma quantia Π investida em ativos sem risco teria um incremento de $r\Pi dt$ num intervalo de tempo dt . Pelo princípio da não - arbitragem entre tal investimento e o portfólio contruído acima, teremos:

$$r\Pi dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \quad (2.5)$$

Substituindo (2.1) e (2.3) em (2.5) e dividindo por dt obteremos:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (2.6)$$

que é a equação diferencial parcial de Black - Scholes.³

É importante mencionar que qualquer opção cujo preço dependa somente do valor de S e de t deve satisfazer a equação de Black - Scholes (ou variantes incorporando dividendos ou parâmetros que dependam do tempo). Muitos problemas de precificação de opções exóticas se tornam simples quando enfocados por tal prisma. Uma outra característica associada a equação de Black - Scholes (2.6) é que ela não depende da taxa de crescimento μ . Ou seja, o valor da opção independe da taxa de crescimento do ativo-objeto.

O estudo das equações diferenciais parciais é um campo vasto quando estudado em sua forma mais geral. No entanto, a maior parte das equações diferenciais parciais encontradas em finanças pertencem a uma classe mais restrita e muito estudada: as equações lineares parabólicas de segunda ordem, como é o caso da equação diferencial parcial de Black - Scholes.

³ P. Wilmott, S. Howison e J. Dewynne. *The Mathematics of Financial Derivatives*. Pp - 41 - 43.

A solução para tais equações também tem sido objeto de bastante estudo. Às vezes, tais soluções podem ser encontradas analiticamente, obtendo, assim, uma solução fechada explícita, como é o caso de opções de compra ou venda do tipo europeu ou, em muitos casos, a solução envolve a resolução via métodos numéricos quando uma fórmula exata não pode ser encontrada.

Contudo, em geral, existem inúmeras soluções para uma dada equação diferencial parcial. Por exemplo, os valores de opções de compra ou venda, ambas satisfazem a equação de Black - Scholes. Deste modo, para que o valor de uma opção seja único, (e assim, podermos encontrar uma solução) algumas condições de contorno para a equação diferencial devem ser postas. Uma condição de contorno especifica o comportamento da solução em alguma parte do domínio da solução.

Derivada a equação de Black - Scholes, para determinarmos o valor de uma opção, devemos considerar as condições final e de contorno do problema, para que o problema tenha solução única.

Consideraremos, primeiramente, o caso de uma opção do tipo europeu de compra, uma de venda, e, a seguir, trataremos do caso de opções de compra e venda americanas.

Uma opção europeia de compra cujo valor seja $C(S,t)$ com preço de exercício E e com data de exercício T , terá sua condição final, seguindo o princípio da não-arbitragem, na data onde $t = T$, o ganho:

$$C(S,T) = \max(S - E, 0)$$

Já as condições de contorno são aplicadas quando $S = 0$ e quando $S \rightarrow \infty$. Quando $S = 0$, $dS = 0$. Desde modo, S nunca varia quando $S = 0$. Logo;

$$C(0,t) = 0$$

Já quando $S \rightarrow \infty$, a magnitude de E se torna insignificante e a opção se torna mais provável de ser exercida. Seu valor então se torna:

$$C(S,t) \rightarrow S$$

Para uma opção de venda $P(S, t)$, a condição final se torna:

$$P(S, T) = \max(E - S, 0)$$

Quando $S = 0$, a opção valerá E :

$$P(0, t) = E$$

Quando $S \rightarrow \infty$, a opção é mais provável de não ser exercida e logo:

$$P(S, t) \rightarrow 0$$

Já no caso das opções americanas há uma característica adicional que torna o problema mais complexo. As opções americanas são caracterizadas por permitirem o exercício antecipado durante a vida da opção. Esta característica traz uma condição extra ao problema. Na realidade, a opção americana dá um direito a mais a seu detentor e, por isso, ela se torna pelo menos tão cara que a opção européia.

O problema da americana reside no fato de que existem valores de S para os quais é ótimo para o detentor da opção exercê-la. Deste modo, durante todo o tempo, é necessário determinarmos não somente o valor da opção, mas também, para que

valores de S , a opção deve ser exercida ou não. Este problema é conhecido como problema de fronteira livre, pois a cada instante t no tempo existe um determinado valor para S que marca a fronteira entre duas regiões : a região em que é ótimo exercer a opção e a região que não o é. Este valor de S , no entanto, varia com o tempo, e ele não é conhecido *a priori*, por isso ele é chamado de $S_f(t)$. Portanto, não sabemos onde aplicar a fronteira a cada instante no tempo t .

Existem, portanto, algumas restrições que devem estar presentes no problema:

- O valor da opção deve ser maior ou igual à função de ganho;
- A equação de Black - Scholes é substituída por uma inequação;
- O valor da opção deve ser uma função contínua de S ;
- Sua inclinação deve ser contínua;

A primeira restrição apenas decorre do princípio da não - arbitragem, ou seja, o lucro obtido por arbitragem do exercício antecipado deve ser menor ou igual a zero. Em outras palavras, ou a opção tem o mesmo valor de sua função de ganho, e portanto, ela deve ser exercida, ou ela é maior que sua função de ganho e, portanto, satisfaz a equação de Black-Scholes, o que nos leva à segunda restrição.

A terceira restrição e quarta restrições também estão relacionada com a não-arbitragem, já que se houvesse uma discontinuidade no valor da opção, seria possível ter um ganho sem risco através de um portfolio de opções.

Portanto, podemos resumir o problema de uma opção americana de venda, como um problema de fronteira livre como se segue. A cada instante t , devemos dividir a região S em duas partes. A primeira onde o exercício é ótimo, $0 \leq S < S_f(t)$ é:

$$P = E - S, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP < 0.$$

E uma outra região $S_f(t) < S < \infty$, onde o exercício não é ótimo e, portanto:

$$P > E - S, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0.$$

As condições na fronteira onde $S = S_f(t)$ são que o valor da opção P e sua inclinação sejam contínuos;

$$P(S_f(t), t) = \max(E - S_f(t), 0), \quad \frac{\partial P}{\partial S}(S_f(t), t) = -1$$

O problema para uma opção americana de compra é análogo a de venda, exceto que a função de ganho passa a ser $C = S - E$.

III. MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

O método das diferenças finitas é um meio pelo qual obtemos soluções numéricas para equações diferenciais parciais. Esta técnica se mostra bastante eficiente e flexível para a solução de um grande número de equações diferenciais parciais existente no campo de finanças e, se aplicado corretamente, é capaz de gerar resultados bastante precisos. A eficiência de tal método reside no fato de ser uma técnica aplicável diretamente a problemas que seriam bastante complexos do ponto de vista de uma solução explícita.

Assim sendo, podemos discretizar a equação diferencial parcial, que representa o problema, e aplicar o método das diferenças finitas para a obtenção de uma solução numérica.

A presente seção pretende, portanto, apresentar o uso das diferenças finitas na solução de equações diferenciais parciais, mais precisamente, da equação de Black - Scholes e, assim, dar as ferramentas necessárias à solução de vários problemas de precificação de opções dos mais variados tipos em que a equação diferencial básica é a

equação de Black - Scholes, ou suas variantes (neste caso, o problema se torna ligeiramente diferente, porém os princípios são os mesmos).

III.1 - APROXIMAÇÃO DAS DIFERENÇAS FINITAS

A idéia central do método das diferenças finitas é substituir as derivadas parciais das equações diferenciais parciais (edp) por aproximações baseadas na expansão de Taylor de funções. Dessa maneira, transformamos o problema de resolver uma equação diferencial num problema de resolução de um sistema de equações algébricas.

Usando a definição da derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial t}(S,t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{f(S,t + \delta t) - f(S,t)}{\delta t}$$

e sendo δt bem pequeno mas diferente de zero ,ao invés de considerarmos $\delta t \rightarrow 0$, podemos definir a aproximação por diferença finita de $\partial f / \partial t$ como sendo

$$\frac{\partial f}{\partial t}(S,t) \approx \frac{f(S,t+\delta t) - f(S,t)}{\delta t} + O(\delta t) \quad (3.0)$$

A aproximação (3.0) é conhecida como diferença avançada, já que estamos avançando em t . Há também duas outras formas bastante usadas: a da diferença atrasada e da diferença centrada, respectivamente;

$$\frac{\partial f}{\partial t}(S,t) \approx \frac{f(S,t) - f(S,t-\delta t)}{\delta t} + O(\delta t) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(S,t) \approx \frac{f(S,t+\delta t) - f(S,t-\delta t)}{2\delta t} + O((\delta t)^2) \quad (3.2)$$

O termo $O(\delta t)$ nos sugere a precisão de tal aproximação, assim quanto menor δt , mais precisa é a aproximação. As aproximações avançada e atrasada nos levam aos métodos das diferenças finitas explícito e implícito, respectivamente, enquanto, que a diferença centrada é usada no método de Crank - Nicolson, os quais serão apresentados mais adiante.

Para as derivadas parciais de f em relação a S as equações são análogas às apresentadas acima.

Já no caso das derivadas de segunda ordem, como por exemplo, $\partial^2 f / \partial S^2$ aplicamos a diferença central simétrica definida como a diferença avançada da diferença atrasada da primeira derivada:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S,t) \approx \frac{f(S + \Delta S, t) - 2f(S, t) + f(S - \Delta S, t)}{(\Delta S)^2} + O((\Delta S)^2) \quad (3.3)$$

Uma técnica bastante usada na aproximação por diferença finita da equação da difusão é desenhar uma malha bidimensional de pontos onde dividimos o eixo S em espaços equidistantes de dimensão ΔS e o eixo t em espaços equidistantes de dimensão Δt . Assim, formamos um plano (S, t) de pontos $(m\Delta S, n\Delta t)$.

Este esquema é representado no diagrama da figura (3.0). Ele consiste numa malha num total de $(m+1)(n+1)$ pontos.

Para ilustrarmos o problema consideraremos a equação de Black - Scholes

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS \frac{\partial f}{\partial S} - rf = 0$$

como sendo a equação diferencial parcial a ser resolvida. Deste modo, teremos o ponto (i, j) como o ponto que corresponde ao tempo $i\Delta t$ e ao preço da ação $j\Delta S$.

Assim, um número espaços no tempo igualmente divididos são escolhidos entre o tempo corrente zero e o exercício da opção em T . Teremos então $\Delta t = T/n$ e um total de $(n+1)$ pontos no tempo a ser considerados:

$$0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T$$

Um número de espaços no eixo dos preços do ativo também são escolhidos. Iremos supor que S_{max} é o valor máximo suficientemente alto, que o ativo pode assumir.

Então definimos $\Delta S = S_{max} / m$, formando num número $(m+1)$ de preços de ativo:

$$0, \Delta S, 2\Delta S, \dots, S_{max}$$

Definida a malha, usaremos a variável $f_{i,j}$ para representar o valor da opção no ponto (i,j) . A malha está representada na figura abaixo.

Os principais métodos de diferenças finitas usados são o método explícito e o implícito. Existem outros métodos como o de Crank - Nicolson que é uma média entre estes dois métodos, e portanto, é considerado mais preciso por extrair as vantagens de ambos os métodos. Apresentaremos, a seguir, as características de tais métodos.

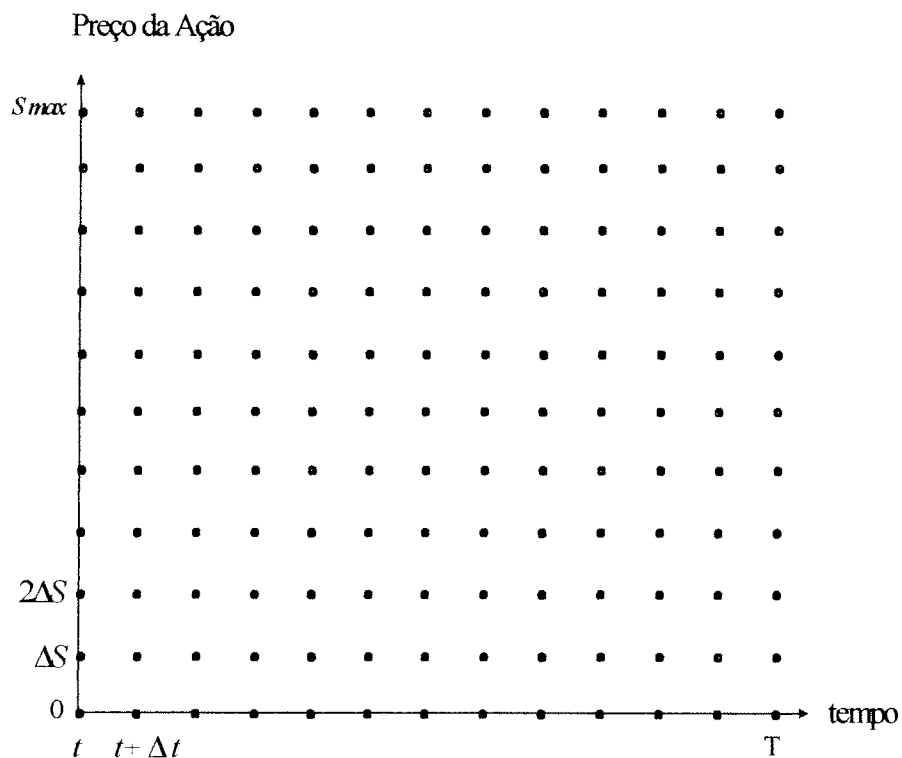


Figura 3.0 - Malha para o método das diferenças finitas

III.II - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS EXPLÍCITO

O método das diferenças finitas explícito usa a diferença central para a derivada $\partial f / \partial x$, a diferença simétrica central para $\partial^2 f / \partial x^2$ e a diferença atrasada para $\partial f / \partial t$. Este método assume que os valores de $\partial f / \partial x$ e $\partial^2 f / \partial x^2$ no ponto (i, j) são os mesmos que no ponto $(i+1, j)$. Deste modo, temos as seguintes equações :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1, j+1} - f_{i+1, j-1}}{2\Delta x} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1, j+1} + f_{i+1, j-1} - 2f_{i+1, j}}{(\Delta x)^2} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1, j} - f_{i, j}}{\Delta t} \quad (3.6)$$

Substituindo as equações (3.4), (3.5) e (3.6) na equação diferencial de Black - Scholes e notando que $S = j\Delta S$, teremos:

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + rj\Delta S \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta S^2 \frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{\Delta S^2} = rf_{i+1,j} \quad (3.7)$$

Rearranjando os termos temos a equação se torna:

$$f_{i,j} = a_j f_{i+1,j-1} + b_j f_{i+1,j} + c_j f_{i+1,j+1} \quad (2.8)$$

onde

$$a_j = \left(-\frac{1}{2} rj\Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t \right)$$

$$b_j = \left(1 - (\sigma^2 j^2 \Delta t + r\Delta t) \right)$$

$$c_j = \left(\frac{1}{2} r_j \Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t \right)$$

É importante notar que $f_{i,j}$ depende apenas dos termos na posição $(i+1)$. Pelo fato de resolvemos o problema de precificação de opções por indução retroativa, (isto é, começamos pela data de vencimento da opção, onde sabemos que a condição final determina o início do processo e, portanto, a função de ganho é definida) a utilização do método explícito torna a resolução direta. Este método não implica em nenhuma relação implícita entre as variáveis, como é o caso do método implícito que veremos mais adiante.

No entanto, apesar do método explícito ser relativamente direto, existem alguns problemas de estabilidade. “Dizemos que um sistema é estável se os erros de arredondamento não são aumentados a cada iteração.”⁴ Pode ser mostrado que a condição de estabilidade para o método explícito está associada ao parâmetro $\Delta t / (\Delta S)^2$ e este deve estar entre 0 e $\frac{1}{2}$ para que a solução seja estável.

É interessante notar que o método explícito é bastante similar ao enfoque das árvores. Na realidade, é como se houvesse uma árvore trinomial, onde as expressões a_j, b_j, c_j da equação (3.8) representassem probabilidades de morvermos na árvore. Podemos então interpretar os termos da seguinte forma:

- $\left(-\frac{1}{2}rj\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t\right)$: probabilidade do preço da ação cair de $j\Delta S$ para $(j-1)\Delta S$ no intervalo de tempo Δt .
- $\left(1 - (\sigma^2 j^2 \Delta t + r\Delta t)\right)$: probabilidade do preço da ação se manter em $j\Delta S$ no intervalo de tempo Δt .
- $\left(\frac{1}{2}rj\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t\right)$: probabilidade do preço da ação subir de $j\Delta S$ para $(j+1)\Delta S$ no intervalo de tempo Δt .⁵

As três probabilidades tem um somatório igual a um e elas nos dão o aumento esperado no preço da ação num mundo neutro ao risco.

⁴ P. Willmott, S. Howison e J. Dewynne. *Ibid.* Pp - 143.

⁵ J. Hull. *Op. Cit.* pp - 356 - 359.

III.III - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS IMPLÍCITO

Nesse método não há uma equação que possa nos dar uma a solução numérica direta como no método explícito, mas sim, um conjunto de relações entre os pontos do plano (S, t) , ou seja, o método implícito requer a solução de sistema de equações.

Existem algumas técnicas mais eficientes de solução numérica para tais sistemas chamadas fatoração LU e SOR. Usando tais técnicas encontrar uma solução numérica pelo método implícito se torna tão eficiente quanto pelo método explícito, com a vantagem de não haver nenhuma restrição à estabilidade. Apesar do método LU ser um método de fatoração mais rápido do que o SOR, ele se aplica somente ao caso da opção europeia, portanto, apresentaremos neste trabalho apenas a técnica de fatoração SOR, por ser um método mais genérico usado tanto para opções americana quanto europeia.

Neste método usaremos a diferença avançada para $\partial f / \partial t$, a diferença central para $\partial f / \partial S$ e a diferença centrada simétrica para $\partial^2 f / \partial S^2$. Teremos então as equações:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{(\Delta S)^2} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} \quad (3.11)$$

Substituindo as equações (3.9), (3.10) e (3.11) na equação diferencial de Black

- Scholes teremos :

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + rj\Delta S \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta S^2 \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2} = rf_{i,j} \quad (3.12)$$

Rearranjando os termos :

$$f_{i+1,j} = a^*_{j} f_{i,j-1} + b^*_{j} f_{i,j} + c^*_{j} f_{i,j+1} \quad (3.13)$$

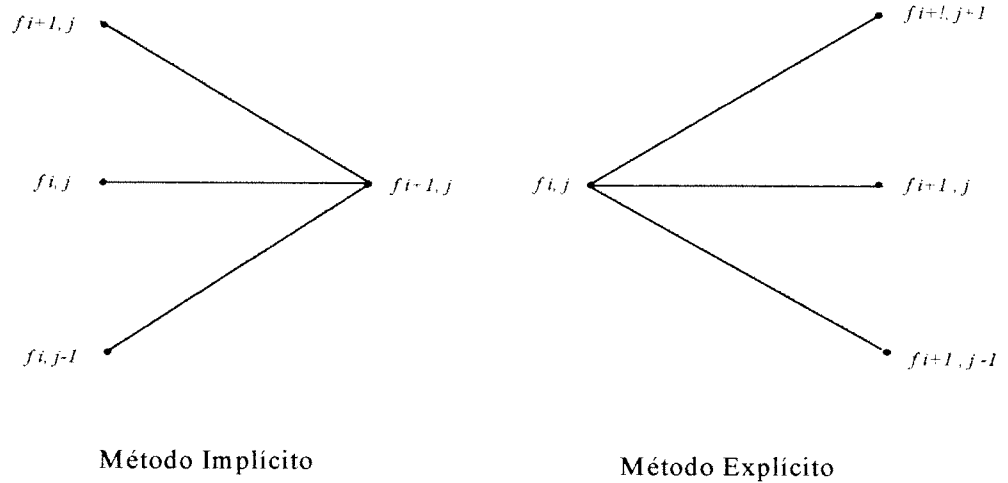
onde

$$a^*_{j} = \left(\frac{1}{2} r j \Delta t - \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t \right)$$

$$b^*_{j} = \left(1 + \sigma^2 j^2 \Delta t + r \Delta t \right)$$

$$c^*_{j} = \left(-\frac{1}{2} r j \Delta t - \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t \right)$$

No método implícito, $f_{i+1,j}$ depende dos nós em i ; portanto, não temos uma relação direta como no método explícito, mas sim, um sistema de equações a ser resolvido. Como pode ser demonstrado no diagrama abaixo:



Esta é a maior desvantagem do método implícito. No entanto, este método é bastante robusto e estável, diferentemente do método explícito que, apesar de ser direto, tem limitações de estabilidade.⁶

III.IV - MÉTODO DE CRANK - NICOLSON

O método de Crank - Nicolson é um método criado para superar as limitações de estabilidade impostas pelo método explícito, bem como ser um método com grau de precisão superior ao implícito simples. Vale notar que este método ainda é considerado

⁶ J. Hull. *Op. Cit.* Pp - 352 - 356.

um método implícito. Pode ser mostrado que ele é preciso na segunda ordem de Δt e ΔS .

O método de Crank- Nicolson é uma média dos métodos explícito e implícito.

Temos que a equação de Black - Scholes pelo método explícito e implícito são dadas respectivamente pelas equações (3.7) e (3.12). Deste modo, para obtermos a equação por este método, somamos as equações (3.7) e (3.12) e tiramos a média. O problema então, não é muito diferente do implícito, já que teremos no lado direito da equação o método explícito, e do lado esquerdo o implícito. Ou seja, lado direito (rhs)

será:

$$rhs = a_j f_{i+1,j-1} + b_j f_{i+1,j} + c_j f_{i+1,j+1} \quad (3.14)$$

onde

$$a_j = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} rj \Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t \right)$$

$$b_j = \left(1 - \frac{1}{2}(\sigma^2 j^2 \Delta t + r \Delta t)\right)$$

$$c_j = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} r j \Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t\right)$$

Determinado o lado direito (*rhs*) da equação diretamente pelo método explícito, o problema então cai numa resolução do método implícito onde o lado esquerdo da equação (*lhs*), definido pelo método implícito, é:

$$lhs = a_j^* f_{i,j-1} + b_j^* f_{i,j} + c_j^* f_{i,j+1} \quad (3.15)$$

onde

$$a_j^* = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} r j \Delta t - \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t\right)$$

$$b_j^* = \left(1 + \frac{1}{2}(\sigma^2 j^2 \Delta t + r \Delta t)\right)$$

$$c^*_j = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} rj \Delta t - \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t \right)$$

Para a solução tanto do método implícito simples quanto para o Crank - Nicolson (que cai num problema de resolução por método implícito) existem métodos eficientes para a solução de sistema de equações. Um método iterativo bastante genérico é o SOR (*ou Successive Over-Relaxation*). Este método é um refinamento do método Gauss - Seidel. O método começa com a observação de que:

$$f_{i,j}^{k+1} = f_{i,j}^k + \left(f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k \right) \quad (3.16)$$

A equação acima nos diz que uma seqüência de iterações $f_{i,j}^k$ irá convergir para $f_{i,j}$ à medida que $k \rightarrow \infty$. Podemos pensar no termo $\left(f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k \right)$ como sendo um termo de correção a ser somado em $f_{i,j}^k$ para que ele convirja para o verdadeiro valor $f_{i,j}$. Existe então a possibilidade de que a seqüência convirja mais rapidamente se corrigirmos os termos seguintes à medida que novos termos são calculados. Isto é verdade se a seqüência de iterações $f_{i,j}^k \rightarrow f_{i,j}$ monotonicamente com o aumento de k , que é o caso de ambos os métodos Gauss-Seidel e SOR. Então, teremos:

$$y_{i,j}^{k+1} = \frac{rhs_j^k - a_j^* f_{i,j-1}^{k+1} - c_j^* f_{i,j+1}^k}{b_j^*} \quad (3.17)$$

$$f_{i,j}^{k+1} = f_{i,j}^k + \omega (y_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k) \quad (3.18)$$

onde ω é o parâmetro de correção ou relaxamento. Vale notar que o algoritmo SOR converge para a solução correta desde que o parâmetro esteja entre os limites $0 < \omega < 2$.

O processo inteiro é repetido (iterado) até que uma medida de erro se torne suficientemente pequena, de modo que não sejam necessárias mais iterações. O valor obtido para $f_{i,j}^{k+1}$ é considerado como o valor verdadeiro de $f_{i,j}$. Existem inúmeras medidas de erro que podem ser utilizadas, como por exemplo⁷:

$$\|f_i^{k+1} - f_i^k\|^2 = \sum_j (f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k)^2$$

O algoritmo SOR, da maneira como foi apresentado acima, é aplicável somente para o caso da opção europeia. Para que o algoritmo SOR possa ser aplicado ao caso

⁷ P. Wilmott, S. Howison and J. Dewynne. *Op. Cit.* Pp - 151.

da opção americana, devemos fazer uma pequena modificação, incluindo a possibilidade de checar o exercício antecipado. Deste modo, partindo das equações (3.17) e (3.18) derivadas para o método de Crank- Nicolson , se iterarmos estas equações até que $f_{i,j}^k$ convirja para $f_{i,j}$, teremos a solução para a equação de Black - Scholes para opção européia.

No entanto, como foi visto anteriormente, há necessidade de se checar o exercício antecipado para o caso americano. Neste ponto devemos checar se vale a pena manter a opção ou exercê-la. Para tal, verificamos qual das situações tem o maior valor, ou seja, a função ganho dado o preço de exercício e o valor do ativo naquele momento, ou o valor da opção:

$$f_{i,j}^{k+1} = \max(f_{i,j}^k + \omega(v_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k) \text{ payoff}_j) \quad (3.19)$$

onde

$$\text{payoff}_j = (S_j - E) \quad \text{para opção de compra}$$

$$\text{payoff}_j = (E - S_j) \quad \text{para opção de venda}$$

É importante notar que a restrição é imposta ao mesmo tempo que $f_{i,j}^{k+1}$ é calculado. O efeito é imediatamente sentido nas próximas iterações de f . Esta variação do SOR é conhecido como SOR projetado. O algoritmo se transforma em:

$$y_{i,j}^{k+1} = \frac{rhs_j^k - a_j^* f_{i,j-1}^{k+1} - c_j^* f_{i,j+1}^k}{b_j^*}$$

$$f_{i,j}^{k+1} = \max(f_{i,j}^k + \omega(y_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k), payoff_{i,j})$$

Para finalizar a apresentação dos métodos numéricos, podemos ainda acrescentar um recurso que o método das diferenças finitas oferece. Pelo fato de estarmos trabalhando com diferenças, podemos extrair do problema o cálculo de dois parâmetros que são extremamente úteis na formação de portfólios de proteção contra o risco de mudanças repentinas no mercado. Estes parâmetros são chamados de *hedges*. Eles medem a variação do preço da opção em relação a variáveis de importância para o problema, como por exemplo, o preço do ativo.

Existem dois parâmetros que podem ser tirados diretamente à medida que fazemos o cálculo do preço da opção: o delta e o gamma. O delta mede a taxa de variação do preço da opção em relação ao preço do ativo:

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S} \quad (3.20).$$

O gamma, por sua vez, mede a taxa variação do delta em relação ao preço do ativo:

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$$

Podemos ver estes parâmetros como derivadas. Assim, o delta seria a derivada do preço da opção em relação ao preço do ativo (inclinação) e o gamma seria o efeito de segunda ordem, portanto, a derivada da segunda (curvatura). O gamma pode ser escrito como :

$$\Gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \quad (3.21)$$

Usando diferenças finitas, podemos reescrever as equações (3.20) e (3.21) respectivamente das seguintes formas:

$$\Delta_j = \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta S} \quad ^8$$

⁸ Podemos também fazer uma média, assim o cálculo do delta fica mais preciso: $\Delta_j = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta S}$

$$\Gamma_j = \frac{(f_{j+1} + f_{j-1} - 2f_j)}{(\Delta S)^2}$$

Outros parâmetros de *hedge* também podem ser calculados, como por exemplo, o theta, que é a taxa de variação do preço da ação em relação ao tempo. No entanto, não iremos utilizar os outros parâmetros aqui neste trabalho, pois a maneira de calculá-los é análoga ao delta.

IV - IMPLEMENTANDO O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Na presente seção, apresentaremos uma aplicação do método das diferenças finitas a fim de ilustrar o processo, suas vantagens e problemas que podem ocorrer. Faremos, a seguir, uma análise de alguns resultados obtidos. Para tal, escolhemos uma opção exótica que englobe várias características interessantes de serem analisadas. A opção a ser precificada será uma opção de venda do tipo bermuda cujo ativo - objeto será uma ação da Telebrás.

Opções bermuda são opções que permitem o exercício antecipado somente em algumas datas específicas ou em alguns intervalos de tempo específicos. Uma opção do tipo bermuda tem características tanto das opções européia como americana. Isto porque, em alguns períodos ela funciona como americana e em outros, como européia. A opção bermuda, face a sua restrição ao exercício em somente alguns períodos, é mais barata do que a americana, mas permite maior flexibilidade que a européia. Esta pode ser uma característica atrativa para investidores que desejam maior flexibilidade do que a disponível numa opção européia, mas que não querem dispor de uma quantia alta na compra de uma opção americana.

- Os parâmetros⁹

Iremos inicialmente apresentar os parâmetros necessários à resolução do problema e mostrar algumas características importantes que eles devem possuir para que não haja dificuldades com a solução numérica. Estas características são de suma importância para a convergência dos resultados, e podem se tornar um obstáculo a mais a ser transposto.

- Volatilidade : (σ)

É a volatilidade anualizada do ativo - objeto.

- Taxa de juros : (r)

Taxa de juros anual. Para o caso brasileiro, usamos a taxa cdi over , mas a transformamos em taxa efetiva anualizada.

- tipo da opção

Opção bermuda de venda sobre ação da Telebrás.

⁹ Alguns detalhes foram fornecidos por J. Dewynne.

- Tempo para o exercício : (T)

Deve ser medido em anos. Para o caso brasileiro usamos o número de dias úteis até o vencimento e o transformamos em anos.

- Preço de Exercício : E
- Preço máximo do ativo a ser considerado: $(smax)$

Este deve ser aproximadamente 3 vezes o preço de exercício da opção a não ser que a $\sigma^2 T$ seja muito alto. Se a $\sigma^2 T$ for muito alto (maior que 1) então $smax$ deve ser aumentado em proporção com $\sqrt{\sigma^2 T}$.

- Número de ΔS : (ns)

Vinte por unidade de preço de exercício gera resultados bastante precisos, no entanto, pode diminuir a velocidade do processo de solução. Duas vezes o $smax$ é suficiente para bons resultados.

- Número de Δt : (nt)

120 por unidade de σT é suficiente. Aumentar o número de iterações melhora a precisão, mas diminui a velocidade do processo. No entanto, se for

necessário aumentar o número de iterações, deve-se aumentar o número de ΔS e Δt de forma que a razão $(ns)^2 dt$ mantenha-se constante.

- Fator de relaxamento para método SOR : (ω)

Existe um valor ótimo para ω que está entre 1 e 2, que minimiza o número de iterações para o procedimento SOR. No entanto, encontrar este valor ótimo é um problema mais complexo que depende dos parâmetros numéricos e financeiros do problema.

Uma regra de bolso é usar um valor próximo de 1 e este valor deve ser aumentado a medida que o número de ΔS aumentar.

- Fator de tolerância de convergência para o métodos SOR. (tol)

Este valor representa a tolerância do método SOR. O método continuará a iterar enquanto o erro for maior que este fator de tolerância. Tipicamente um valor próximo de 0.00001 deve ser suficiente.

- Relação entre ΔS e Δt

Esta é uma relação importante para a estabilidade da solução numérica. No caso do método explícito, esta razão deve ser $0 < \Delta t / (\Delta S)^2 \leq 1/2$. O método

implícito não exige que a razão $\Delta t / (\Delta S)^2$ esteja compreendida entre 0 e $1/2$, no entanto, vemos que ela é de suma importância para a convergência do método. À medida que aumentamos no número de ΔS e Δt , esta razão deve ser mantida constante. Esta regra de bolso aumenta consideravelmente a precisão do método.

- **O problema**

O problema da opção bermuda de venda é dividido em duas partes: a parte em que não é permitido o exercício antecipado e nesse caso é igual ao de uma opção europeia de venda e a parte onde é permitido o exercício antecipado e o problema se resume numa opção americana de venda. Logo:

- Períodos em que não é permitido o exercício antecipado :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0$$

com

$$P(0,t) = E, \quad P(S,t) \rightarrow 0 \text{ quando } S \rightarrow \infty$$

e

$$P(S,T) = \max(E - S, 0)$$

- Períodos em que o exercício antecipado é permitido;

$$P = E - S, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP < 0$$

na região $0 \leq S < S_f(t)$ e

$$P > E - S, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0$$

na região $S_f(t) < S < \infty$.

E onde $S = S_f(t)$:

$$P(S_f(t), t) = \max(E - S_f(t), 0) , \quad \frac{\partial P}{\partial S}(S_f(t), t) = -1$$

- **Solução Numérica**

Para fazermos a solução numérica usaremos o método de Crank - Nicolson por ser o método que não apresenta problemas de instabilidade e ser o mais preciso numericamente como foi apresentado na seção anterior.

Inicialmente, fazemos uma aproximação da equação de Black - Scholes em tempo discreto. Como foi dito anteriormente, no método de Crank - Nicolson fazemos uma média das equações (3.7) e (3.12) . A solução numérica é encontrada a partir da solução das equações (3.14) e (3.15). A equação (3.14) nada mais é do que o método explícito e, por isso, sua solução é direta. Já a equação (3.15) representa a parcela implícita do problema; ela gera um conjunto de relações entre as variáveis nos

levando a um sistema de equações a ser resolvido. Para sua solução foi apresentado o método iterativo SOR (ou sua versão para o caso americano SOR projetado).

Para o caso da opção bermuda iremos usar ambos os métodos (SOR e SOR projetado). Assim, nos períodos em que for permitido o exercício usaremos SOR projetado e nos outros o SOR. Portanto:

$$y_{i,j}^{k+1} = \frac{rhs_j^k - a_j^* f_{i,j-1}^{k+1} - c_j^* f_{i,j+1}^k}{b_j^*}$$

Se o exercício for permitido:

$$f_{i,j}^{k+1} = \max(f_{i,j}^k + \omega(y_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k) \text{ payoff}_j)$$

onde $\text{payoff}_j = (E - S_j)$

Senão:

$$f_{i,j}^{k+1} = f_{i,j}^k + \omega(y_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k)$$

Este método é iterado inúmeras vezes até que $f_{i,j}^k \rightarrow f_{i,j}$. Quando um valor, com um erro tolerável for alcançado, movemos-nos na malha para o próximo intervalo de tempo.

Começamos o processo usando a condição final do problema, onde o valor de uma opção de venda bermuda na data T é $\max(E - S_T, 0)$ onde S_T é o valor da ação nesta data. Logo:

$$f_{m,j} = \max(E - j\Delta S, 0) \quad \text{onde } j = 0, 1, \dots, ns. \quad (4.0)$$

O valor da opção de venda quando o preço da ação for zero e o próprio preço de exercício E :

$$f_{i,0} = E \quad \text{onde } i = 0, 1, \dots, nt. \quad (4.1)$$

Já o valor da opção de venda tende a zero quando o preço da ação tende a infinito. Aproximamos então para:

$$f_{i,ns} = 0 \quad \text{onde } i = 0, 1, \dots, nt. \quad (4.2)$$

As equações (4.0), (4.1) e (4.2) definem as três extremidades da malha da figura 3.0, onde $S = 0$, $S = smax$, $t = T$.

Com as equações (3.14) e (3.15) e usando os métodos SOR e SOR projetado a cada iteração, resolvemos o sistema de equações que determina $f_{i,j}$. Através de indução retroativa determinamos os valores de todos os pontos até que se chegue na extremidade esquerda da malha onde $t = 0$, ou seja, na data presente e obtemos os valores das opções para vários preços de opção S , onde $0 \leq S \leq smax$.

- **Resultados¹⁰**

Consideramos como dados do problema, uma opção bermuda de venda sobre ação da Telebrás, com os seguintes parâmetros¹¹:

- preço do ativo : 158.0

- Volatilidade : 30 % ao ano

¹⁰ A convenção utilizada para identificar as opções bermuda é:

berm3 : opção bermuda com exercício antecipado permitido durante o 3º. mês
berm6 : opção bermuda com exercício antecipado permitido durante o 6º. mês
berm9 : opção bermuda com exercício antecipado permitido durante o 9º. mês
berm369 : opção bermuda com exercício antecipado permitido durante o 3,6,9 meses.

¹¹ Os parâmetros do ativo bem como da opção foram coletados do mercado no dia 23/06/97

- Preço de Exercício : 158.0

- Tempo para o exercício : 1 ano (ou 261 dias úteis). Ou seja, o vencimento se dá no dia 23/06/98.

- Taxa de juros (cdi over): 2.2 %

- Preço máximo do ativo (*smax*) : 474

- Número de ΔS : 948

- Número de Δt : 250

As opções bermuda utilizadas permitem o exercício antecipado durante um certo período de tempo. A tabela 4.0 mostra os resultados obtidos¹² para uma faixa de preços de ativo. É importante notar como os valores das opções bermuda se situam entre a europeia e a americana. Outra característica interessante é que quanto mais direito de exercício antecipado se dá à opção (isto é, quanto mais meses é permitido o exercício) , mais próximo seu valor fica da opção americana correspondente.

¹² Os resultados foram obtidos através da execução de um programa em linguagem C de minha autoria.

Tabela 4.0 - Resultados para as Opções Bermuda

Preço do ativo	Européia	Americana	Berm3	Berm6	Berm9	Berm369	Berm69	Berm678
0	130.486	158.000	153.471	146.808	140.541	153.471	146.808	146.808
50	80.492	108.000	103.471	96.808	90.541	103.471	96.808	96.808
100	34.149	58.000	53.479	47.189	41.920	53.486	47.240	47.240
110	27.033	48.000	43.556	37.983	33.583	43.607	38.098	38.097
120	21.002	38.000	33.950	29.631	26.268	34.145	29.831	29.826
130	16.046	28.000	25.179	22.434	20.100	25.642	22.717	22.704
140	12.082	19.515	17.833	16.543	15.085	18.594	16.884	16.861
150	8.984	13.647	12.223	11.941	11.135	13.173	12.302	12.271
151	8.716	13.169	11.757	11.547	10.794	12.717	11.907	11.876
152	8.456	12.708	11.307	11.164	10.461	12.275	11.524	11.492
153	8.202	12.263	10.874	10.792	10.138	11.847	11.152	11.118
154	7.956	11.833	10.456	10.431	9.823	11.433	10.789	10.756
155	7.715	11.419	10.053	10.081	9.517	11.032	10.438	10.403
156	7.482	11.020	9.665	9.741	9.219	10.645	10.096	10.061
157	7.255	10.634	9.292	9.411	8.929	10.271	9.765	9.729
158	7.034	10.262	8.933	9.092	8.648	9.909	9.443	9.407
160	6.610	9.557	8.256	8.482	8.108	9.222	8.827	8.790
190	2.511	3.284	2.642	2.895	2.956	3.112	3.090	3.056
200	1.798	2.298	1.848	2.013	2.086	2.166	2.158	2.130
250	0.325	0.386	0.325	0.334	0.354	0.356	0.356	0.349
300	0.058	0.066	0.058	0.058	0.060	0.060	0.060	0.059

Esta característica pode ser melhor vista na figura 4.0, que mostra um gráfico dos resultados obtidos da tabela 4.0.

Já na análise do delta apresentado na figura 3.1, pode - se perceber que a “opção americana tem sua curva do delta mais inclinada, dificultando as operações de *hedge* no mundo real. Desta forma, quanto maior a região de exercício antecipado, mais difícil de se replicar dinamicamente uma opção bermuda.”¹³

¹³ F. Gonçalves e A A Souza. (1997) “Pricing of Bermuda Style Options with Variable Strike Schedule with na Application to IBOVESPA Options”. *Emergin Markets Quarterly*.

Como uma extensão à análise do delta, podemos aplicar a mesma conclusão com relação ao gamma, como pode ser visto na figura 4.2. Como podemos ver o gamma é muito mais sensível à medida que nos aproximamos do caso americano.

Podemos concluir que a opção bermuda é usada em seguros de portfolios. Isso porque é mais barata que a opção americana, mas ainda mantém alguma flexibilidade de exercício antecipado, se tornando atrativas para investidores que tenham um horizonte de ganho fixado, já que os mesmos podem fixar as datas para exercício antecipado como melhor lhe convém.¹⁴

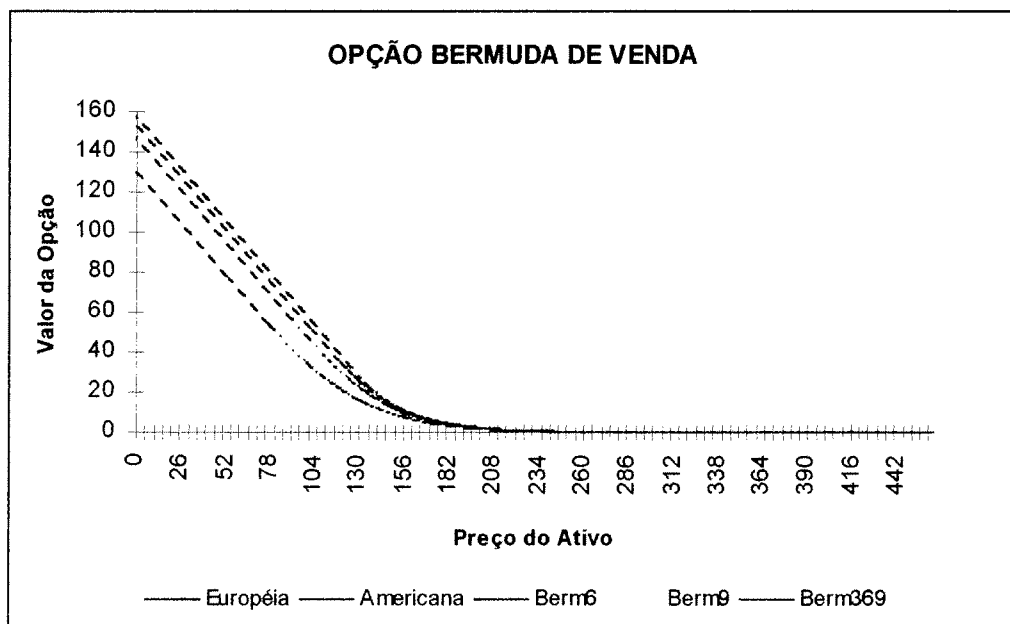


Figura 4.0 - Valor da opção de venda Bermuda .

¹⁴ F. Gonçalves e A A Souza. *Op.cit.*

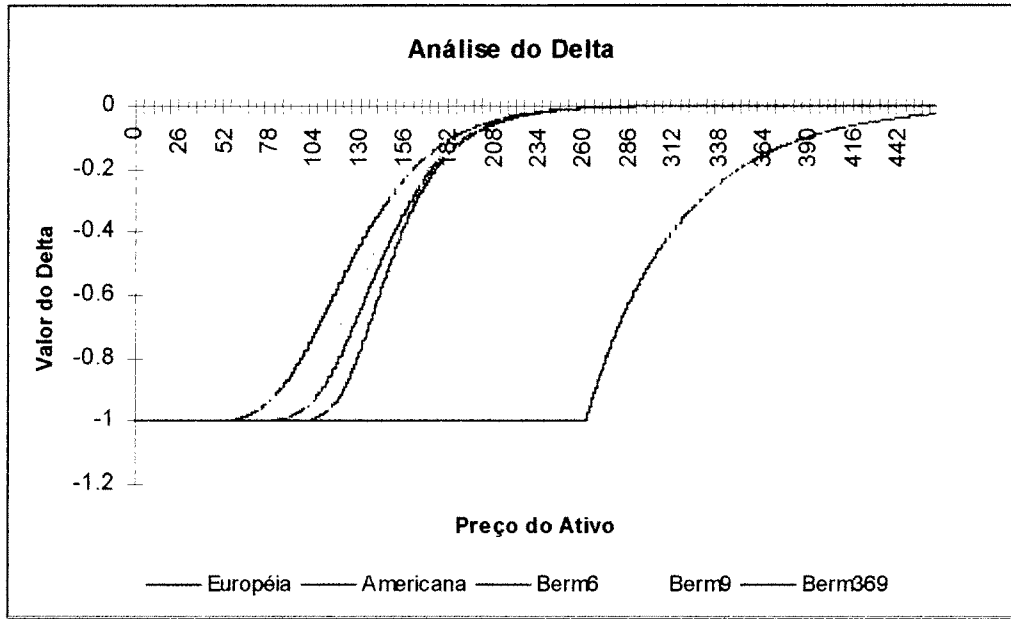


Figura 4.1 - Valor do delta da opção Bermuda de venda .

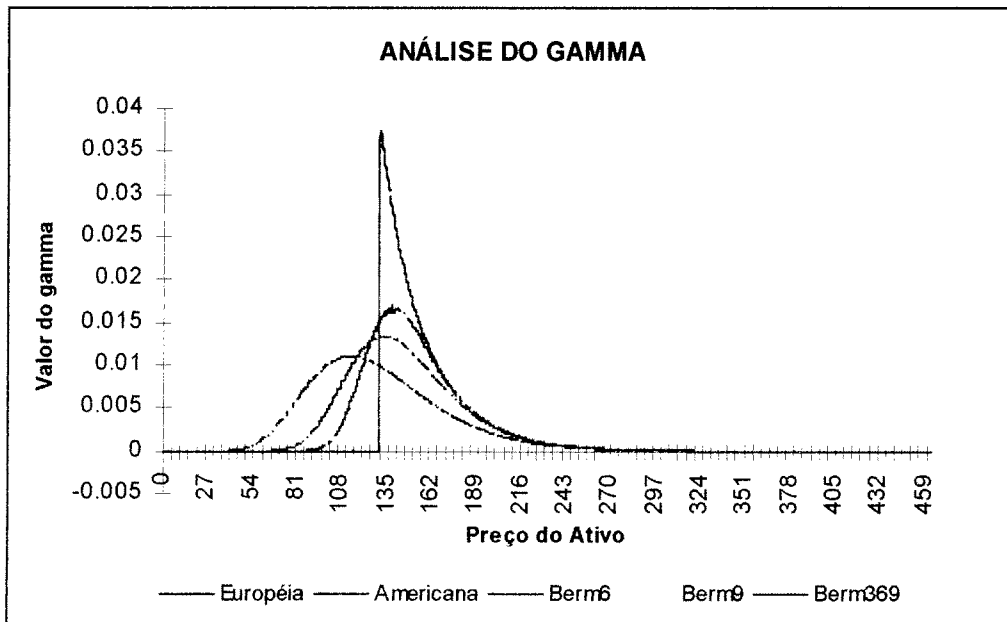


Figura 4.2 - Valor do gamma da opção Bermuda de venda .

V - CONCLUSÃO

Concluimos, portanto, a apresentação do método das diferenças finitas como uma metodologia bastante genérica de precificação de opções extraída de conceitos fundamentais no campo dos derivativos. Com o método das diferenças finitas somos capazes de precificar qualquer opção que dependa apenas do tempo t e do preço do ativo S a partir da equação diferencial parcial de Black - Scholes.¹⁵ Vimos que o que define as características de cada opção que obedece à edp de Black - Scholes são as condições final e de contorno. A partir daí, o problema está posto. Com os métodos numéricos mostrados (explícito, implícito e Crank - Nicolson) fazemos uma aproximação em tempo discreto para a edp de Black - Scholes e a resolvemos com a utilização de tais métodos.

Os métodos numéricos apresentados são bastante úteis não só na precificação de opções mais simples como a opção europeia ou a americana mas, como foi dito acima, se aplicam também na precificação de opções exóticas. É neste campo que tais métodos se mostram efetivamente eficazes dado que a maioria das opções exóticas não possuem solução fechada para sua precificação. Apresentamos um exemplo de como seria a precificação de uma opção exótica, mais precisamente, de uma opção bermuda de venda, de forma a ilustrar bem todos os passos da resolução.

O método utilizado foi o Crank - Nicolson por não ter problemas de estabilidade bem como ser o mais preciso, apesar de que ele é, computacionalmente,

¹⁵ Se incluirmos dividendos ou o ativo se tornar o Futuro usamos variantes da edp de Black - Scholes.

mais exigente. Como vimos, a cada iteração temos que resolver um sistema de equações, o que torna a resolução mais lenta. Portanto, o que evidenciamos é que existe um “*trade - off*”¹⁶ entre estabilidade e menor esforço entre os métodos implícito e explícito, respectivamente. No entanto, apresentamos um método de solução de sistema de equações bastante utilizado, o método SOR, para facilitar a resolução de tais sistemas. Apesar de existirem outros métodos de solução de sistemas como, por exemplo, o método de decomposição LU, resolvemos mostrar apenas o método SOR, por ser mais genérico e aplicável ao problema da opção americana, o que não acontece com o método LU.

Por fim, mostramos que também podemos calcular os parâmetro de *hedge* a partir da malha construída, o que é um processo direto e que nos é muito útil na determinação de portfólios de opções para proteção contra o risco.

Os métodos numéricos são bastante flexíveis para a inclusão de mais parâmetros de dependência. Neste caso, os métodos são bastante eficazes e a malha construída se torna n - dimensional. Um exemplo disso são opções de renda fixa onde há dependência em mais de dois parâmetros, com por exemplo, a taxa de juros além do preço do ativo e do tempo.

¹⁶ Traduz - se por troca. Mas a palavra é conhecida e usada em inglês.

VI - APÊNDICE

Para a transformação da taxa de juros cdi over em taxa anualizada usamos a seguinte fórmula:

$$r = \frac{\log\left(\frac{1 + cdi}{3000}\right)^{ndu}}{T}$$

onde ndu é o tempo para o exercício em número de dias úteis e T tempo para o exercício em anos:

$$T = \frac{ndu}{252}$$

- Os dados do problema apresentado no capítulo IV, já devidamente transformados são :

- volatilidade = 0.3
- Tempo para o exercício = 1.035714
- Preço de exercício = 158

- Taxa de juros = 0.184732
- Número de $\Delta S = 948$
- Número de $\Delta t = 250$
- $S_{\max} = 474$
- $\Delta S = 0.50$
- $\Delta t = 0.004143$

VII - BIBLIOGRAFIA

- Chriss, Neil. "Black - Scholes and Beyond." Irwin Professional Publishing.
- Cox, J., e M. Rubinstein. "Option Markets." Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1985.
- R. Geske and K. Shastri. "Valuation by Approximation: A Comparison of Alternative Option Valuation Techniques." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 20 (Março 1985), 45 - 71.
- Gonçalves F. e A A Souza. "Pricing of Bermuda - Style Options with Variable Strike Schedule with na Application to IBOVESPA Options" *Emerging Markets Quarterly*. Spring 1997.
- Hull, J. "Options, Futures and Other Derivatives." 2nd. Ed. Englewood Cliffs.
- Nelken, I. "The Handbook of Exotic Options". Irwin Professional Publishing.
- Wilmott, P., S. Howison and J. Dewynne. " The Mathematics of Financial Derivatives - A Student Introduction." Cambridge University Press.
- Wilmott, P., S. Howinson and J. Dewynne. "Option Pricing - Mathematical Models and Computation." Cambridge University Press.

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100