

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

Expectativas de inflação, crenças heterogêneas e restrição ao short-selling

Fernando Luiz Pereira Cordeiro

Matrícula: 1110262

Orientador: Carlos Viana de Carvalho

Rio de Janeiro

Junho 2015

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

Expectativas de inflação, crenças heterogêneas e restrição ao short-selling

Fernando Luiz Pereira Cordeiro

Matrícula: 1110262

Orientador: Carlos Viana de Carvalho

Declaro que o presente trabalho é de minha autoria e que não recorri para realizá-lo, a nenhuma forma de ajuda externa, exceto quando autorizado pelo professor tutor

Fernando Luiz Pereira Cordeiro

Rio de Janeiro

Junho 2015

As opiniões expressas neste trabalho são de responsabilidade única e exclusiva do
autor

Agradecimentos

Ao meu orientador, Carlos Viana, pela atenção, paciência e motivação desde os tempos do PIBIC.

Aos meus pais, José e Elizabeth, e à minha irmã, Adriana, pelo apoio incondicional ao longo de todos os anos. Nada seria possível sem eles.

Aos meus amigos da PUC-Rio, pelos bons momentos vividos na graduação.

Sumário

0	Introdução	8
1	Revisão da Literatura	10
1.1	Títulos indexados à inflação e expectativa implícita	10
1.2	Crenças heterogêneas e restrições ao short-selling	12
2	Modelos Teóricos	14
2.1	Demanda individual	14
2.2	Mercado sem restrição ao short-selling	15
2.3	Mercado com restrição total ao short-selling	17
2.4	Mercado com custos quadráticos	17
2.5	Mercado com custos fixos	20
3	Dados	24
3.1	Survey of Professional Forecasters	24
3.2	Expectativa de inflação implícita no mercado	25
3.2.1	Breakeven Inflation	25
3.2.2	Decomposição de Abrahams, Adrian, Crump e Moench	26
3.2.3	Decomposição de Christensen, Lopez e Rudebusch	27
4	Análise Empírica	29
4.1	Correlação entre quartis do SPF e EII	30
4.2	Correlação entre dispersão do SPF e EII	32
4.3	Precisão das expectativas	34
5	Conclusão	36

A	Demonstrações	40
B	Tabelas e Figuras	46
B.1	Medidas de dispersão	46
B.2	Tabelas e Figuras	47

Lista de Figuras

2.1	Distribuição normal e fronteira de participação	22
2.2	Curvas de demanda D_0 , D_1 , D_2 e D_3	23
3.1	Distribuições de expectativas de analistas do SPF ao longo do tempo	28
4.1	Valores do RMSE entre medidas de expectativa de inflação implícita e quartis do SPF.	30
4.2	Correlações entre quartis do SPF e medidas de expectativa de inflação implícita	31
4.3	Correlações medidas de dispersão do SPF e medidas de expectativa de inflação implícita	33
B.1	Correlações entre quartis do SPF e demais componentes das decomposições AACM e CLR	49
B.2	Previsões do SPF contra Breakeven do Bloomberg	53
B.3	Previsões do SPF contra expectativa de inflação implícita no mercado (decomposição CLR)	54
B.4	Previsões do SPF contra expectativa de inflação implícita no mercado (decomposição AACM)	54
B.5	Inflação realizada e inflação que era esperada para a data 4 trimestres atrás	55
B.6	Inflação realizada e inflação que era esperada para a data 20 trimestres atrás. Valores anualizados.	55
B.7	Inflação realizada e inflação que era esperada para a data 40 trimestres atrás. Valores anualizados.	55

Lista de Tabelas

3.1	Estatísticas descritivas das séries de Breakeven em data trimestral, calculadas com janela de 15 dias	26
3.2	Estatísticas descritivas das séries de expectativas implícitas, pela de decomposição AACM, em data trimestral e calculadas com janela de 15 dias	27
3.3	Estatísticas descritivas das séries de expectativas implícitas, pela de decomposição CLR, em data trimestral	27
4.1	RMSE entre medidas de expectativa de inflação e a inflação realizada no período	34
B.1	Correlações entre quartis do SPF e medidas de EII	47
B.2	Correlações entre dispersão do SPF e medidas de EII	48
B.3	Valores do RMSE entre a variável de expectativa implícita descrita na primeira coluna e quartil ou média do SPF	49
B.4	Regressão do Breakeven na média, desvio-padrão, skewness e kurtosis da distribuição do SPF.	50
B.5	Regressões da expectativa de inflação pela decomposição CLR e AACM na média, desvio-padrão, skewness e kurtosis da distribuição do SPF.	51
B.6	Estatísticas descritivas completas das séries de Breakeven em data trimestral	52
B.7	Estatísticas descritivas completas das séries de Expectativas Implícitas, pela de decomposição CLR, em data trimestral	52
B.8	Estatísticas descritivas completas das séries de Expectativas Implícitas, pela de decomposição AACM, em data trimestral	53

Capítulo 0

Introdução

As expectativas de inflação são observadas atentamente pelos formuladores de política econômica e pelos participantes do mercado financeiro. Por um lado, a manutenção da estabilidade dos preços no longo prazo é comumente vista como o principal objetivo da política monetária. As expectativas de inflação são fundamentais para a condução da política monetária, uma vez que a inflação esperada é amplamente entendida como um componente importante na determinação dos preços no presente. Além disso, as expectativas de longo prazo são informações relevantes para avaliar a credibilidade da política monetária num regime de metas. Por outro lado, a inflação esperada é um fator determinante no preço de diversos ativos financeiros indexados à inflação. Como os investidores são interessados em retornos reais, o acompanhamento da inflação esperada é fundamental para alocação de recursos.

Existem dois tipos distintos de medidas de expectativas de inflação. A fonte do primeiro tipo são pesquisas periódicas para avaliar a expectativa de inflação de analistas profissionais, normalmente conduzidas por bancos centrais e consultorias. Outra fonte é utilizar a estrutura a termo de títulos nominais e a estrutura a termo de títulos indexados à inflação para encontrar a expectativa de inflação implícita, habitualmente chamada de *Breakeven inflation* (BEI). No entanto, apesar da fama, a BEI é uma medida imprecisa da expectativa de inflação. No mercado norte-americano, em geral, títulos indexados à inflação são vistos como menos líquidos do que os títulos nominais. Já a precificação do título nominal, justamente por não estar protegido da inflação, normalmente leva em conta um prêmio de risco de inflação, isto é, como o investidor deve ser recompensado pela incerteza do retorno real do

ativo. Então, é possível que o BEI aumente mesmo que a expectativa de inflação se mantenha inalterada, refletindo apenas que investidores estão demandando uma compensação maior pela incerteza que enfrentam. Por essas dificuldades de medição, atualmente existe uma crescente literatura tratando da decomposição do BEI em expectativa de inflação e prêmios de risco e liquidez.

Apesar das tentativas de decomposição de BEI buscarem um único parâmetro unidimensional chamado “expectativa de inflação implícita”, as pesquisas de expectativas de analistas revelam que em qualquer instante do tempo, existe uma significativa heterogeneidade nas opiniões de especialistas. Observando-se a distribuição das expectativas é possível notar que existem opiniões mais otimistas ou mais pessimistas em relação à expectativa implícita do mercado. Se por algum motivo um investidor acredita que a inflação precificada está abaixo ou acima do que ele acredita que ocorrerá, ele pode se posicionar para lucrar nesse evento. O mercado comporta opiniões simetricamente opostas, entretanto, os custos para realizar essas operações são, normalmente, assimétricos.

Este trabalho pretende estudar como a distribuição de expectativas e o preço de mercado interagem num contexto com custos de posições *long* e *short* assimétricos. Em particular, é estudado o comportamento do preço de um ativo de risco em um modelo teórico com agentes heterogêneos e restrições ao short-selling. Avalia-se também como diferentes momentos e quantis da distribuição de expectativas estão relacionados ao preço. Em seguida, são analisados os dados de expectativas de analistas e implícitas no mercado norte-americano, procurando entender se os modelos desenvolvidos na parte teórica podem ser relevantes para compreender as relações entre essas variáveis.

Nos próximos capítulos o trabalho é exposto da seguinte forma: no capítulo 1 é feita uma revisão sucinta da literatura mais relevante para os temas abordados, no capítulo 2 são desenvolvidos os modelos teóricos, no capítulo 3 são descritos os dados, no capítulo 4 são apresentadas análises empíricas do mercado de TIPS. Por último, as principais ideias apresentadas ao longo do texto são sintetizadas e uma conclusão a respeito do tema é feita no capítulo 5.

Capítulo 1

Revisão da Literatura

O presente trabalho possui dois tópicos fundamentais que, a princípio, podem ser investigados independentemente, sem a necessidade de serem relacionados. São eles (i) modelos com agentes com crenças heterogêneas e restrições ao short-selling e (ii) títulos indexados à inflação e a estimação da expectativa implícita. A seguir a literatura mais relevante para cada tópico é revisada de maneira sucinta e, por isso mesmo, não pretende ser uma análise exaustiva de toda produção acadêmica de cada tópico.

1.1 Títulos indexados à inflação e expectativa implícita

Tradicionalmente, o BEI é calculado como a taxa de juros nominal menos a taxa de juros real, para a mesma maturidade. No entanto, tal cálculo não leva em consideração alguns aspectos do mercado de títulos, como prêmios de risco de inflação e de liquidez. Por isso, dificilmente o BEI captura o verdadeiro componente de expectativas presente na estrutura a termo. Existe uma vasta literatura sobre como estimar corretamente os prêmios de risco e de liquidez e, conseqüentemente, como decompor corretamente o BEI. Em geral, os modelos utilizados são da classe dos modelos afim da estrutura a termo – *affine term structure model* (ATSM). Piazzesi (2010) apresenta os modelos afim da estrutura a termo, a literatura e as ideias que motivaram a criação de tais modelos. Os modelos afim da estrutura a termo assumem que a dinâmica da estrutura a termo evolui de acordo com uma variável de

estado. Essa variável de estado pode ser observável ou não, e é modelada como um processo estocástico. Essa classe de modelos também impõe restrições de não arbitragem ao cross-section dos yields e consideram que o yield de um título para uma dada maturidade é uma função linear na variável de estado.

Christensen, Lopez e Rudebusch (2010) apresentam um modelo afim da estrutura a termo capaz de estimar conjuntamente a estrutura a termo de títulos nominais e reais, assim fazendo a decomposição do BEI em expectativa de inflação e prêmio de risco de inflação. O prêmio de risco de inflação advém da postura do investidor em títulos nominais, que demanda um retorno maior por estar exposto ao risco da inflação, que pode corroer seus retornos reais ex-post. Além disso, os resultados empíricos mostram que expectativas de inflação implícitas se mantiveram bem ancoradas ao longo do tempo. Outro resultado interessante é que o prêmio de risco da inflação, apesar de volátil, se manteve em média próximo a zero.

D'Amico, Kim e Wei (2014) mostram que o diferencial de liquidez entre os títulos indexados à inflação e os títulos nominais é relevante, tanto nos EUA quanto no Reino Unido, e por isso deve ser levado em conta. Os autores utilizam um modelo afim da estrutura a termo e modelam o diferencial de liquidez entre os títulos nominais e reais como um fator estocástico adicional que influencia a estrutura a termo indexada à inflação, mas não a nominal. Os autores mostram que o prêmio de liquidez era relativamente alto no início (aproximadamente 100bps) e seguiu declinando até 2003, mantendo-se estável até a crise de 2008, quando chegou a 300bps. Abrahams et al. (2015) apresentam um modelo afim da estrutura a termo para realizar uma decomposição semelhante do BEI em prêmio de risco de inflação e prêmio de liquidez.

Já o artigo de Haubrich, Pennachi e Ritchken (2012) apresenta um modelo afim da estrutura a termo para estimar a estrutura a termo nominal e real. São utilizados dados de surveys de expectativas de inflação para estimar o prêmio de risco de inflação, em particular, utilizam a mediana do *Survey of Professional Forecasters* e a média do *Blue Chip Economic Indicators*. Chernov e Mueller (2012) também utilizam dados de surveys para estimar um modelo afim da estrutura a termo que contem um fator oculto e encontram que a expectativa de inflação estimada pelo modelo é movida pela inflação, produto e o fator oculto.

1.2 Crenças heterogêneas e restrições ao short-selling

Um dos primeiros artigos a tratar do tema explicitamente é Miller (1977), onde é proposto um modelo simples com agentes com crenças heterogêneas sobre o retorno de um ativo de risco, é mostrado que ao se restringir totalmente o short-selling as opiniões pessimistas são retiradas do mercado, restando apenas os mais otimistas. Se o subconjunto de participantes otimistas é capaz de absorver toda demanda, então o preço do ativo de risco será maior do que quando não há restrição. Já Jarrow (1980) apresenta um modelo de equilíbrio geral, com diversos ativos de risco que um investidor pode escolher, e com agentes com expectativas heterogêneas. O autor mostra que, nesse contexto, o efeito final de uma restrição ao short sobre o preço de um ativo é ambíguo devido ao efeito substituição entre os ativos.

Em uma abordagem um pouco diferente, Diamond e Verrecchia (1987) utilizam um modelo de informação imperfeita, em que alguns traders são bem informados com alguma informação privada enquanto outros traders podem apenas observar a informação pública. É argumentado que se todos participantes do mercado são racionais e sabem que existe a restrição ao short-selling, então deveriam levar essa informação em conta ao precificar o ativo, de modo que não existiria um viés de sobreprecificação do ativo. Os autores argumentam que a restrição ao short-selling reduz a eficiência informacional do mercado. Uma previsão interessante do modelo proposto é que períodos de ausência de transações são interpretados como uma má notícia, uma vez que indicam uma probabilidade significativa de participantes informados com notícias ruins não poderem realizar o short.

Mais recentemente, Anufriev e Tuinstra (2013) apresentam um modelo dinâmico, com agentes com crenças heterogêneas e racionalidade limitada, considerando o caso em que existe custo de transação para realizar o short. O resultado encontrado é semelhante à intuição descrita por Miller (1977), mas como o modelo é mais complexo a existência de equilíbrios desse tipo depende dos parâmetros utilizados no modelo.

Já no campo empírico, Jones e Lamont (2002) mostram que existem evidências de que restrições, como altos custos e riscos institucionais e legais, resultam em ações sobreprecificados. Os autores coletaram dados de custo de short na *New York Stock Exchange* (NYSE) de 1926 a 1933 e mostram que ações com alto custo de

short apresentam baixos retornos no futuro, o que é consistente com a hipótese de sobreprecificação. A descrição feita é que o preço da ação aumenta antes de entrar na lista de ações que podem ser alugadas, atingindo seu pico imediatamente antes de entrar na lista. O preço em seguida cai, corrigindo parte da sobreprecificação.

Utilizando dados mais recentes, Chang et al. (2007) estudam o caso da bolsa de Hong Kong, onde apenas algumas ações contidas em uma lista podem ser utilizadas para o short-selling. Os autores analisam dados de 1994 até 2003 de eventos em que ações são incluídas na lista que permite short-selling. Encontram evidências de que as ações que sofrem restrições de short são sobreprecificadas e que a sobreprecificação tende a ser mais intensa nas ações em que existe uma maior dispersão na opinião de investidores. Já Beber e Pagano (2013) analisam diversos casos em que o short-selling foi banido durante a crise de 2007-2009, em diferentes países. Os dados cobrem 17mil ações de 30 países, em sua maioria países Europeus ou não-Europeus desenvolvidos. Os autores encontram que as proibições de short durante a crise foram prejudiciais para a liquidez dos ativos, não conseguiram estancar a queda nos preços (com exceção para o mercado norte-americano) e que desaceleraram o processo de ajustamento dos preços.

Capítulo 2

Modelos Teóricos

Neste capítulo, primeiramente é apresentado um modelo com agentes com crenças heterogêneas, sem qualquer forma de fricção no mercado de um ativo de risco. Em seguida, são expostas variações de modelos teóricos com agentes com crenças heterogêneas e onde existe alguma forma de restrição ao short-selling. A opção por apresentar uma multiplicidade de ideias tem como intuito expor o processo de investigação que o tema propicia e que, dada a riqueza do contexto, continua em aberto. Os modelos teóricos tem por objetivo auxiliar a compreensão dos dados.

2.1 Demanda individual

Considere um investidor que se defronta com um problema de alocação de carteira. Esse investidor maximiza sua utilidade esperada, que possui a forma $u(w) = -e^{-\gamma w}$, onde γ é a aversão ao risco absoluta e w é a riqueza. É uma utilidade com aversão ao risco absoluta constante (CARA). O investidor possui duas opções de ativos. É possível investir em um ativo sem risco que possui preço 1 e paga R , ou investir em um ativo arriscado que tem preço p e paga z . Suponha que o payoff do ativo de risco, z , é normalmente distribuído com média μ e variância σ^2 . Assim, se o investidor possui riqueza inicial w_0 e investe a quantia q no ativo arriscado terá riqueza final

$$w = (w_0 - q)R + \frac{q}{p}(z) = w_0R + q \left(\frac{z}{p} - R \right)$$

Como z é normalmente distribuído, a riqueza final w também é normalmente

distribuída com média e variância dadas por

$$E[w] = w_0 R + q \left(\frac{\mu}{p} - R \right), \quad Var(w) = \left(\frac{q}{p} \right)^2 \sigma^2 \quad (2.1)$$

O problema do investidor é encontrar uma quantia q para investir no ativo de risco que maximiza sua utilidade esperada. Como w possui distribuição normal, para o investidor, o problema de escolher q que maximiza a utilidade esperada é equivalente ao problema de encontrar q que maximiza a função objetivo $\Phi(q)$ ¹:

$$\Phi(q) = E[w] - \frac{\gamma}{2} Var(w) \quad (2.2)$$

Substituindo as equações de (2.1) em (2.2) é possível obter

$$\Phi(q) = w_0 R + \frac{q}{p} (\mu - Rp) - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{q}{p} \right)^2 \sigma^2$$

Portanto, a condição de primeira ordem para o problema de encontrar um q que maximiza a equação (2.2) é

$$\left(\frac{\mu}{p} - R \right) - \gamma \frac{\sigma^2}{p^2} q = 0 \quad \Rightarrow \quad q^* = \frac{\left(\frac{\mu}{p} - R \right)}{\gamma \frac{\sigma^2}{p^2}}$$

Além disso, segue que $\Phi''(q^*) < 0$, de modo que a condição de segunda ordem para a maximização é satisfeita. Por fim, a demanda individual pelo ativo de risco é a quantia ótima a ser gasta dividida pelo preço do ativo.

$$d = \frac{q^*}{p} = \frac{\mu - Rp}{\gamma \sigma^2} \quad (2.3)$$

2.2 Mercado sem restrição ao short-selling

Suponha que existe um contínuo de agentes indexados por $i \in [0, 1]$. Cada agente i possui uma distribuição individual para o payoff do ativo de risco $z_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$. Assim, apenas a média da distribuição é diferente entre os agentes, enquanto que a variância se mantém constante para todo i . Portanto, dada a heterogeneidade das médias pessoais de z_i , existe uma distribuição das médias de z na população. Suponha que a distribuição de μ possui média $E[\mu]$, variância σ_μ^2 , e densidade f , contínua, diferenciável e com suporte sobre \mathbb{R} .

¹Uma demonstração detalhada desse fato pode ser encontrada, por exemplo, no segundo capítulo de Back (2010)

Cada agente calcula sua demanda individual, tomando como dados os parâmetros positivos γ , R e p e sua expectativa de payoff μ_i . A demanda individual é

$$d_i = \frac{\mu_i - Rp}{\gamma\sigma^2} \quad (2.4)$$

Para um dado preço $p > 0$ a demanda agregada pelo ativo de risco é obtida integrando-se as demandas individuais de acordo com a distribuição de μ

$$D_0(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} d_i f(\mu) d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu - Rp}{\gamma\sigma^2} f(\mu) d\mu = \frac{E[\mu] - Rp}{\gamma\sigma^2} \quad (2.5)$$

Portanto, para um dado $p > 0$, a demanda pelo ativo de risco na economia é expressa pela diferença entre o payoff esperado de uma unidade do ativo de risco, $E[\mu]$, e o custo de oportunidade de comprar uma unidade do ativo, Rp , “descontados” pelo produto da aversão ao risco absoluta e variância do payoff do ativo. Assim, R , γ e σ^2 afetam negativamente a demanda agregada pelo ativo de risco.

Dado um nível fixo de oferta $S > 0$ é preciso verificar quais condições são necessárias para que o equilíbrio ocorra. Isto é, quais restrições devem ser impostas para que exista um $p_0 > 0$ tal que $D_0(p_0) = (E[\mu] - Rp_0)/\gamma\sigma^2 = S$. Portanto, se o equilíbrio ocorre o preço é

$$p_0 = \frac{E[\mu] - \gamma\sigma^2 S}{R}$$

De modo que, para que o equilíbrio exista é preciso que $E[\mu] > \gamma\sigma^2 S$. Assume-se que essa condição é satisfeita. Portanto, na situação em que não há nenhuma forma de restrição ao short-selling, o preço de equilíbrio depende negativamente dos parâmetros R , γ , S , σ^2 (variância das expectativas individuais) e positivamente da média da distribuição de médias individuais, $E[\mu]$. É importante notar que a distribuição das médias de payoff, μ_i , e sua variância, σ_μ^2 , não afetam a determinação do equilíbrio. É possível interpretar o preço de equilíbrio como a diferença entre a média do payoff esperado do ativo de risco e um prêmio de risco $\gamma\sigma^2 S$ (que advém do fato de todos participantes serem avessos ao risco), descontada pela taxa de juros sem risco da economia.

2.3 Mercado com restrição total ao short-selling

Nesse caso, não é permitido o short-selling no mercado. De modo que, participantes com demanda individual negativa pelo bem de risco não transacionam. A demanda individual efetivamente se comporta da seguinte forma

$$d_i = \begin{cases} \frac{\mu_i - Rp}{\gamma\sigma^2} & \text{se } \mu_i > Rp \\ 0 & \text{se } \mu_i \leq Rp \end{cases}$$

A demanda agregada continua sendo obtida da mesma forma. Para um dado $p > 0$ as demandas individuais são agregadas, considerando-se a distribuição de μ .

$$D_1(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} d_i f(\mu) d\mu = \int_{Rp}^{+\infty} \frac{\mu_i - Rp}{\gamma\sigma^2} f(\mu) d\mu$$

Proposição 1. *O preço de equilíbrio p_1 , que garante $D_1(p_1) = S$, é estritamente maior do que p_0*

De certa forma, a proposição 1 é intuitiva. Se o equilíbrio existe para $D_0(p_0) = S$, isto é, quando o mercado abrange todas opiniões possíveis, então quando as opiniões pessimistas são retiradas do mercado o preço naturalmente irá refletir uma opinião mais otimista do que a inicial. Esse resultado é consistente com a intuição proposta por Miller (1977).

2.4 Mercado com custos quadráticos

Nesse caso, o investidor arca com um custo caso decida obter uma quantia $q \neq 0$. O custo é proporcional ao quadrado da quantidade do ativo de risco adquirida. Para $q < 0$ o custo total é $(q/p)^2 c_s$. Já para $q > 0$ o custo total é $(q/p)^2 c_b$. Assim, a riqueza final do investidor é dada por

$$w = \begin{cases} \left(w_0 - q - c_b \left(\frac{q}{p} \right)^2 \right) R + \frac{q}{p} z & \text{se } q \geq 0 \\ \left(w_0 - q - c_s \left(\frac{q}{p} \right)^2 \right) R + \frac{q}{p} z & \text{se } q < 0 \end{cases}$$

Conseqüentemente, a função objetivo que o investidor maximiza também possui dois casos.

$$\Phi(q) = \begin{cases} w_0 R + \frac{q}{p} (\mu - Rp) - c_b R \left(\frac{q}{p} \right)^2 - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{q}{p} \right)^2 \sigma^2 & \text{se } q \geq 0 \\ w_0 R + \frac{q}{p} (\mu - Rp) - c_s R \left(\frac{q}{p} \right)^2 - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{q}{p} \right)^2 \sigma^2 & \text{se } q < 0 \end{cases}$$

Para resolver o problema do investidor, observa-se que sempre que $\mu > Rp$ é ótimo gastar uma quantia positiva com o ativo de risco. Essa condição pode ser interpretada como a situação em que o payoff esperado do ativo de risco é maior do que o custo de oportunidade de investir nesse ativo, isto é, o valor obtido ao investir o preço do ativo de risco à taxa de juros sem risco, Rp . Da mesma forma, quando $\mu < Rp$, ou seja, quando o investidor acredita que o pagamento esperado do ativo não recompensa seu custo de oportunidade, ele escolhe $q < 0$. Portanto, a função demanda individual é dada por

$$d_i = \begin{cases} \frac{\mu_i - Rp}{2c_b R + \gamma\sigma^2} & \text{se } \mu_i \geq Rp \\ \frac{\mu_i - Rp}{2c_s R + \gamma\sigma^2} & \text{se } \mu_i < Rp \end{cases}$$

Agora, nenhum investidor está fora do mercado. No entanto, cada participante adquire uma quantidade menor do que no caso em que não existe custo. Matematicamente, esse efeito é capturado pela mudança na inclinação da curva de demanda individual. Quando não existem custos a inclinação da curva é $-R/\gamma\sigma^2$ independentemente do tipo da operação. Agora, quando gasta-se uma quantia $q \neq 0$ a inclinação passa a ser menor em módulo, $-R/(2c_s R + \gamma\sigma^2)$ caso $q < 0$ ou $-R/(2c_b R + \gamma\sigma^2)$ caso $q > 0$. Assim, a demanda pelo ativo de risco no mercado é

$$D_2(p) = \int_{-\infty}^{Rp} \frac{\mu - Rp}{2c_s R + \gamma\sigma^2} f(\mu) d\mu + \int_{Rp}^{+\infty} \frac{\mu - Rp}{2c_b R + \gamma\sigma^2} f(\mu) d\mu \quad (2.6)$$

É interessante notar que, ao contrário do caso em que não existem custos ou restrições, a demanda depende do formato da densidade da distribuição de expectativas f . Por exemplo, um caso interessante seria se a distribuição de expectativas mantivesse a média mas alterasse a variância. Neste caso, como o formato de f muda é provável que a demanda também mude e, ainda assim, a média das expectativas será a mesma e a mudança no preço não poderia ser interpretada como uma mudança na opinião média dos participantes.

Um primeiro caso particular desse mercado é quando $c_b = 0$ e $c_s > 0$, ou seja, somente quando o investidor realiza um short-selling ele incorre em um custo positivo.

Proposição 2. *Quando os custos são quadráticos tais que $c_b = 0$ e $c_s > 0$, o preço de equilíbrio p_2 , que garante $D_2(p_2) = S$, é estritamente maior do que p_0 .*

O resultado da proposição 2 segue a mesma intuição de Miller (1977). Quando somente quem realiza short-selling enfrenta algum tipo de restrição, o mercado de certa forma está favorecendo aqueles que possuem uma opinião “otimista” do ativo, enquanto que os “pessimistas”, para qualquer preço, realizam short em quantidades menores. Naturalmente, o preço estará viesado para a opinião otimista.

Já em uma situação em que existe uma simetria nos custos, $c_s = c_b$, tanto “otimistas” quanto “pessimistas” enfrentam o mesmo tipo de restrição.

Proposição 3. *Se os custos são quadráticos tais que $c_s = c_b > 0$, então o preço de equilíbrio p_2 , que garante $D_2(p_2) = S$, é estritamente menor do que p_0*

A proposição 3 mostra que quando todos enfrentam o mesmo custo a demanda agregada pelo ativo é impactada uniformemente. De modo que, a inclinação da demanda muda da mesma forma que na demanda individual. Mais precisamente, a demanda individual de cada investidor é linear e com a mesma inclinação, consequentemente, a demanda agregada terá a mesma inclinação.

Por outro lado, uma situação mais realista é quando $c_s > c_b > 0$. Nesse caso, o resultado é ambíguo a respeito do preço de equilíbrio em relação a p_0 . Se o custo de short é maior do que o custo de comprar, então ele pode ser escrito como $c_s = \lambda c_b$, onde $\lambda > 1$. A próxima proposição resume os resultados nesse caso.

Proposição 4. *Se os custos são quadráticos tais que $c_b > 0$ e $c_s = \lambda c_b$, onde $\lambda > 1$, então existem dois casos mutuamente excludentes para o preço de equilíbrio p_2 , que garante $D_2(p_2) = S$:*

(i) *Se $\frac{2c_b\lambda R + \lambda\gamma\sigma^2}{2c_b\lambda R + \gamma\sigma^2} < \frac{\int_0^{+\infty} \mu f(\mu) d\mu}{|\int_{-\infty}^0 \mu f(\mu) d\mu|}$ então p_2 pode ser maior, menor ou igual a p_0 , dependendo do valor da oferta S ;*

(ii) *Caso contrário, $p_2 > p_0$ para qualquer S que garanta $D_0(p_0) = S$*

A proposição 4 mostra como uma situação ligeiramente mais complexa e, nesse caso, mais realista, torna o resultado completamente dependente aos parâmetros do problema. No entanto, é interessante notar que existem casos em que mesmo com $\lambda \rightarrow \infty$ é possível que o preço de equilíbrio p_2 esteja abaixo de p_0 .

2.5 Mercado com custos fixos

Nesse caso, se o investidor decide gastar uma quantia positiva no ativo de risco ele deve pagar um custo fixo c_b . Por outro lado, se ele deseja gastar uma quantia negativa no ativo, ele deve pagar o custo fixo c_s . A estrutura de custos é tal que $0 < c_b \leq c_s$. Existem três casos distintos para a riqueza final:

$$w = \begin{cases} (w_0 - q - c_b)R + \frac{q}{p}z & \text{se } q > 0 \\ w_0R & \text{se } q = 0 \\ (w_0 - q - c_s)cR + \frac{q}{p}z & \text{se } q < 0 \end{cases}$$

Conseqüentemente, a função objetivo do investidor também é dividida nos três casos

$$\Phi(q) = \begin{cases} w_0R + \frac{q}{p}(\mu - Rp) - c_bR - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{q}{p}\right)^2 \sigma^2 & \text{se } q > 0 \\ w_0R & \text{se } q = 0 \\ w_0R + \frac{q}{p}(\mu - Rp) - c_sR - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{q}{p}\right)^2 \sigma^2 & \text{se } q < 0 \end{cases}$$

Mais uma vez, para resolver o problema do investidor, é preciso observar a relação entre o payoff esperado do ativo de risco e seu custo de oportunidade. Se $\mu > Rp$ o investidor maximiza o primeiro caso da função objetivo (para $q > 0$), mas como o custo é fixo e não depende da quantia a ser escolhida pelo investidor (para $q > 0$), a demanda individual é a mesma do mercado sem restrições, descrita na equação (2.3). Entretanto, o investidor deve comparar a função objetivo avaliada no ponto ótimo para o caso $q > 0$ com a opção de não investir no ativo de risco e obter com certeza w_0R . Se, para um dado p , a demanda for muito pequena, é possível que não compense o custo fixo c_b . A condição para investir $q > 0$ no ativo de risco é

$$\begin{aligned} \Phi(q^*) &> w_0R \\ w_0R + \left(\frac{\mu - Rp}{\gamma\sigma^2}\right)(\mu - Rp) - c_bR - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\mu - Rp}{\gamma\sigma^2}\right)^2 \sigma^2 &> w_0R \\ \frac{(\mu - Rp)^2}{\gamma\sigma^2} - \frac{1}{2} \frac{(\mu - Rp)^2}{\gamma\sigma^2} &> c_bR \quad \Rightarrow \quad (\mu - Rp)^2 > 2\gamma\sigma^2 c_bR \end{aligned}$$

Como este é o caso de $\mu > Rp$, segue que $\mu - Rp > \sqrt{2\gamma\sigma^2 c_bR}$.

De maneira similar, se é o caso em que $\mu < Rp$, gastar uma quantia positiva no ativo de risco não é ótimo, uma vez que seu custo de oportunidade é maior do que

o payoff esperado. Portanto, O investidor maximiza o terceiro caso de sua função objetivo e compara tal função avaliada no ponto ótimo com a opção de obter w_0R com certeza. Novamente, a demanda ótima como solução do terceiro caso da função objetivo é igual a do mercado sem restrições, descrita na equação (2.3). O investidor estará disposto a gastar uma quantia negativa se vale a seguinte condição:

$$\Phi(q^*) > w_0R \quad \Rightarrow \quad (\mu - Rp)^2 > 2\gamma\sigma^2c_sR$$

Como este é o caso de $\mu < Rp$, segue que $\mu - Rp < -\sqrt{2\gamma\sigma^2c_sR}$.

Portanto, a demanda individual pode ser descrita da seguinte forma

$$d_i = \begin{cases} \frac{\mu_i - Rp}{\gamma\sigma^2} & \text{se } \mu_i - Rp > \sqrt{2\gamma\sigma^2c_bR} \\ 0 & \text{se } -\sqrt{2\gamma\sigma^2c_sR} < \mu_i - Rp < \sqrt{2\gamma\sigma^2c_bR} \\ \frac{\mu_i - Rp}{\gamma\sigma^2} & \text{se } \mu_i - Rp < -\sqrt{2\gamma\sigma^2c_sR} \end{cases}$$

A demanda pelo ativo de risco no mercado é dada por

$$D_3(p) = \int_{-\infty}^{Rp - \sqrt{2\gamma\sigma^2c_sR}} \frac{\mu - Rp}{\gamma\sigma^2} f(\mu) d\mu + \int_{Rp + \sqrt{2\gamma\sigma^2c_bR}}^{+\infty} \frac{\mu - Rp}{\gamma\sigma^2} f(\mu) d\mu \quad (2.7)$$

Neste caso, assim como no caso de custos quadráticos, a forma da função densidade é determinante na demanda. Também ocorre uma fronteira de participação no mercado para os valores de μ . Isto é, investidores com $\mu_i \in [Rp - \sqrt{2\gamma\sigma^2c_sR}, Rp + \sqrt{2\gamma\sigma^2c_bR}]$ não participam do mercado do ativo de risco

Nessa situação o resultado do preço de equilíbrio é ambíguo, pois tanto participantes “otimistas” quanto “pessimistas” estão saindo do mercado. Se o preço de equilíbrio para $D_3(p) = S$ é maior, menor ou igual ao preço p_0 é uma questão que depende dos valores dos custos c_b e c_s e da forma da função densidade f .

Vamos considerar o caso em que os custos são simétricos, isto é, $c_b = c_s = c$. É possível representar a demanda como

$$D_3(p) = D_0(p) - \int_{Rp - \sqrt{2\gamma\sigma^2cR}}^{Rp + \sqrt{2\gamma\sigma^2cR}} \frac{\mu - Rp}{\gamma\sigma^2} f(\mu) d\mu = D_0(p) - M(p, c)$$

Então, para analisar como o preço de equilíbrio varia em relação ao caso sem custos

e restrições é preciso entender como o sinal de $M(p, c)$ se comporta.

$$M(p, c) = \frac{1}{\gamma\sigma^2} \left[\int_{-\sqrt{2\gamma\sigma^2 cR}}^0 tf(t + Rp)dt + \int_0^{\sqrt{2\gamma\sigma^2 cR}} tf(t + Rp)dt \right]$$

$$M(p, c) = \frac{1}{\gamma\sigma^2} \left[\int_0^{\sqrt{2\gamma\sigma^2 cR}} t(f(Rp + t) - f(Rp - t))dt \right] \quad (2.8)$$

Como os intervalos de integração de ambas integrais são simétricos em torno de 0, é o comportamento da função densidade no intervalo $(Rp - \sqrt{2\gamma\sigma^2 cR}, Rp + \sqrt{2\gamma\sigma^2 cR})$ que determina o efeito final sobre o preço, em relação ao caso base. Assim, um caso inequívoco de quando o preço de equilíbrio é menor do que p_0 é se para todo $t \in (Rp - \sqrt{2\gamma\sigma^2 cR}, Rp + \sqrt{2\gamma\sigma^2 cR})$ ocorre $f(Rp + t) - f(Rp - t) > 0$.

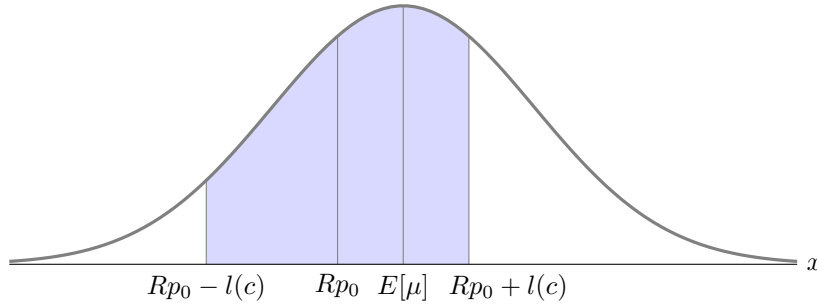


Figura 2.1: A intuição do argumento é que no equilíbrio sem fricções, Rp_0 está necessariamente a esquerda da média da distribuição, que é simétrica no caso normal

Proposição 5. *Se a distribuição dos μ_i é normal e os custos são simétricos, então o preço de equilíbrio p_3 que garante $D_3(p_3) = S$ é estritamente menor do que p_0*

A ideia principal desse modelo é que custos fixos de transação criam uma espécie de fronteira de participação no mercado na reta de valores de μ . Os agentes que não possuem opiniões suficientemente “fortes” para superar o custo de oportunidade Rp acrescido do custo da operação acabam ficando fora do mercado, restando apenas opiniões mais extremas.

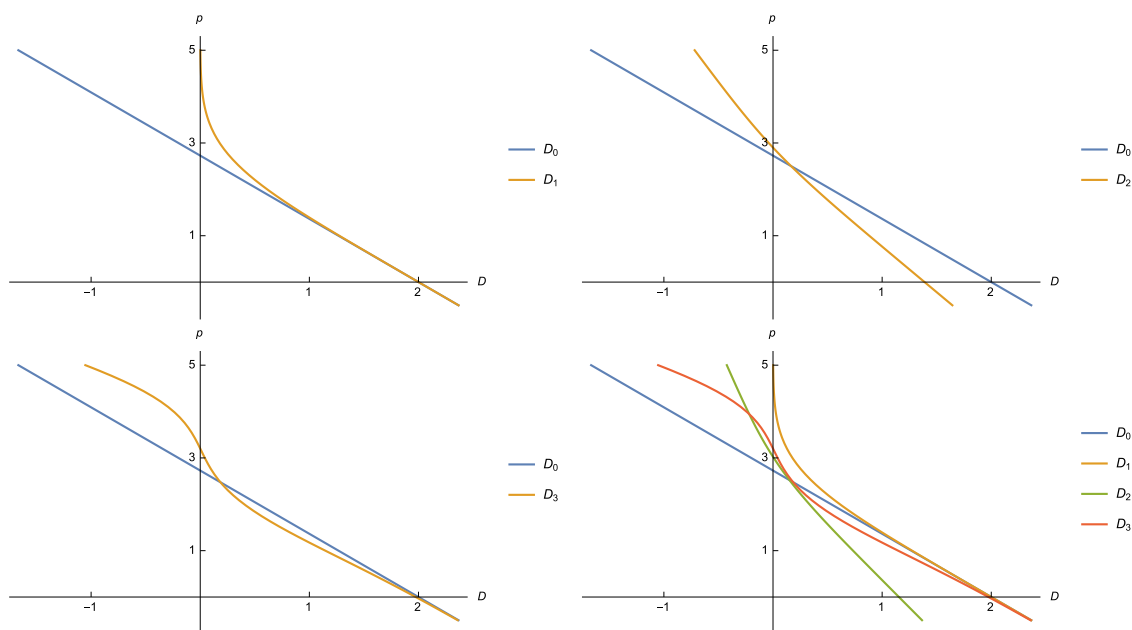


Figura 2.2: Gráficos mostram as demandas D_1, D_2, D_3 junto com a demanda D_0 . O último gráfico mostra todas as demandas plotadas ao mesmo tempo. Para gerar esses gráficos utilizou-se a distribuição normal com média 3 e variância 1 para as expectativas. Os parâmetros utilizados foram $\gamma = 0.5$, $R = 1.1$, $c_s = 2$ e $c_b = 0.5$.

Capítulo 3

Dados

3.1 Survey of Professional Forecasters

Os dados de expectativas de inflação de analistas macroeconômicos foram obtidos no Survey of Professional Forecasters (SPF), organizado pelo Federal Reserve de Philadelphia. A partir dos microdados foi possível criar um painel de dados, não balanceado e de frequência trimestral, para a expectativa de inflação para os prazos de um ano, cinco e dez anos. Esses dados permitem analisar a distribuição das expectativas de inflação dos analistas em cada trimestre. Um analista participando da pesquisa pode responder sua expectativa para a inflação para o trimestre atual, para os próximos quatro trimestres, para o ano seguinte, para o ano após o seguinte e para o prazo de cinco e dez anos.

No final do primeiro mês de cada trimestre, o *Bureau of Economic Analysis* divulga o seu *advance report* que contém uma primeira estimativa do PIB do trimestre anterior. O Philadelphia FED envia os questionários do SPF logo após o lançamento do *advance report*. A partir de 1992Q2, o prazo para responder os questionários era até final da segunda ou terceira semana do segundo mês do trimestre. Desde 2005Q1, o prazo de resposta foi apertado por alguns dias, ficando na segunda semana do segundo mês do trimestre.

Para o prazo de um ano, o painel vai do primeiro trimestre de 2000 até o primeiro trimestre de 2015. Ao longo dos 62 trimestres que compõem essa base de dados, foram registrados 110 forecasters diferentes. Em média, um forecaster apresentou 21,8 previsões, com um desvio padrão de 17,6 previsões. Já para o prazo

de cinco anos, os dados vão do terceiro trimestre de 2005 até o primeiro trimestre de 2015. Para o prazo de dez anos, os dados vão do primeiro trimestre de 2000 ao primeiro trimestre de 2015. A figura 3.1 mostra como as distribuições do SPF se comportam ao longo do tempo, para os prazos de um, cinco e dez anos.

3.2 Expectativa de inflação implícita no mercado

A seguir são apresentadas medidas de expectativa de inflação obtidas a partir das curvas de juros de títulos nominais e dos títulos indexados à inflação (TIPS). O Breakeven inflation (BEI), apesar de refletir as expectativas de inflação não é uma medida precisa, pois é distorcida por fatores relevantes: (i) tipicamente TIPS são menos líquidas do que os títulos nominais, de modo que prêmios de liquidez são presentes; e (ii) o yield do título nominal incorpora um prêmio por risco de inflação. Visando expurgar esses efeitos são utilizadas duas metodologias distintas de decomposição do BEI em prêmios e expectativa de inflação. Ao longo do texto, o conjunto de medidas formado pelo BEI e suas decomposições será chamado de expectativas de inflação implícitas (EII).

3.2.1 Breakeven Inflation

Os dados de inflação Breakeven (BEI), foram obtidos a partir do terminal Bloomberg. O BEI fornecido pelo Bloomberg é o simples cálculo da taxa de juros nominal para uma dada maturidade menos a taxa de juros real da mesma maturidade. As séries temporais obtidas via Bloomberg são de frequência diária, enquanto que os dados do SPF são trimestrais. Para comparar as expectativas do SPF com o BEI da maneira mais coerente possível, é preciso garantir que o conjunto de informação utilizado pelos analistas seja o mais próximo possível do conjunto de informação dos participantes do mercado na hora de precificar os TIPS e títulos nominais.

Aqui cabe fazer uma distinção, as séries de BEI são de frequência diária, indexadas por t . Já as pesquisas do SPF são trimestrais indexadas pela data trimestral τ . A série trimestral do BEI compatível com a elaboração do SPF foi feita utilizando a data limite para um analista reportar sua expectativa para a pesquisa do Philadelphia FED. A partir da data limite, foi calculada a média aritmética do BEI

numa janela de w dias antes da data limite até a data limite. Mais especificamente, seja be_{mt} o Breakeven para maturidade m , de frequência diária, na data t . A data limite, do tipo diário, para um analista enviar sua expectativa para a pesquisa da data τ é $\bar{t}(\tau)$. Então, o valor do Breakeven trimestral correspondente à pesquisa da data τ , utilizando uma janela de w dias é dado por:

$$be_{m\tau} = \frac{\sum_j be_{mj}}{|D_\tau|}, \quad j \in D_\tau = \{t : \bar{t}(\tau) - w \leq t \leq \bar{t}(\tau)\} \quad (3.1)$$

Onde $|D_\tau|$ representa o número de elementos no conjunto D_τ . Caso o conjunto seja vazio, a observação é desconsiderada. A tabela 3.1 mostra as estatísticas descritivas das séries trimestrais de BEI, para diferentes janelas e maturidades. Para o restante do texto, foi escolhido a apresentar os dados utilizando sempre a janela de 15 dias para calcular os dados trimestrais compatíveis com as pesquisas do SPF. Em todas análises empíricas que se seguem, o resultado se mostrou robusto à variação da janela entre 5, 10 e 15 dias.

Maturidade	Min.	Mediana	Média	Máx.	DP	No. Obs.
1 ano	-3.91	1.28	1.07	3.25	1.50	34
5 anos	-0.44	1.97	1.92	2.69	0.58	53
10 anos	0.89	2.25	2.14	2.67	0.38	61

Tabela 3.1: Estatísticas descritivas das séries de Breakeven em data trimestral, calculadas com janela de 15 dias

3.2.2 Decomposição de Abrahams, Adrian, Crump e Moench

Abrahams et al. (2015) apresentam um modelo afim da estrutura a termo que é utilizado para decompor o BEI em expectativa de inflação, prêmio de risco de inflação e componente de liquidez (que ajusta o fato do TIPS ser visto como menos líquido por participantes do mercado). Para o presente trabalho, foram utilizadas séries com estimativas da decomposição de Abrahams et al. (2015) para maturidades de 5 e 10 anos, para o período de janeiro de 1999 até novembro de 2014¹. Ao longo do

¹Agradeço Richard Crump por ter gentilmente compartilhado as estimativas de Abrahams et al. (2015)

texto, essa decomposição será referida por AACM. Como a expectativa de inflação é originalmente estimada para séries de frequência diária, aqui foi utilizada a mesma metodologia descrita na seção 3.2.1 sobre os dados Breakeven para gerar séries de frequência trimestral compatíveis com o SPF.

Maturidade	Min.	Mediana	Média	Máx.	DP	No. Obs.
5 anos	0.26	2.39	2.37	3.23	0.44	61
10 anos	1.67	2.37	2.36	2.85	0.22	61

Tabela 3.2: Estatísticas descritivas das séries de expectativas implícitas, pela de decomposição AACM, em data trimestral e calculadas com janela de 15 dias

3.2.3 Decomposição de Christensen, Lopez e Rudebusch

Christensen, Lopez e Rudebusch (2010) também utilizam um modelo afim da estrutura a termo, mas o BEI é decomposto em expectativa de inflação e prêmio de risco de inflação. Para o presente trabalho, foram utilizadas séries com estimativas desta decomposição para maturidade de 1, 5 e 10 anos, no período de janeiro de 2003 até março de 2015². Ao longo do texto, essa decomposição será referida por CLR. Como a decomposição é originalmente estimada para séries de frequência diária, aqui foi utilizada a mesma metodologia descrita na seção 3.2.1 sobre os dados Breakeven para gerar séries de frequência trimestral compatíveis com o SPF.

Maturidade	Min.	Mediana	Média	Máx.	DP	No. Obs.
1 ano	0.38	1.81	1.71	2.62	0.65	49
5 anos	0.29	2.14	2.05	3.71	0.67	49
10 anos	1.00	2.26	2.13	3.95	0.58	49

Tabela 3.3: Estatísticas descritivas das séries de expectativas implícitas, pela de decomposição CLR, em data trimestral

²Agradeço Jens Christensen por ter gentilmente compartilhado as estimativas feitas com o modelo de Christensen, Lopez e Rudebusch (2010)

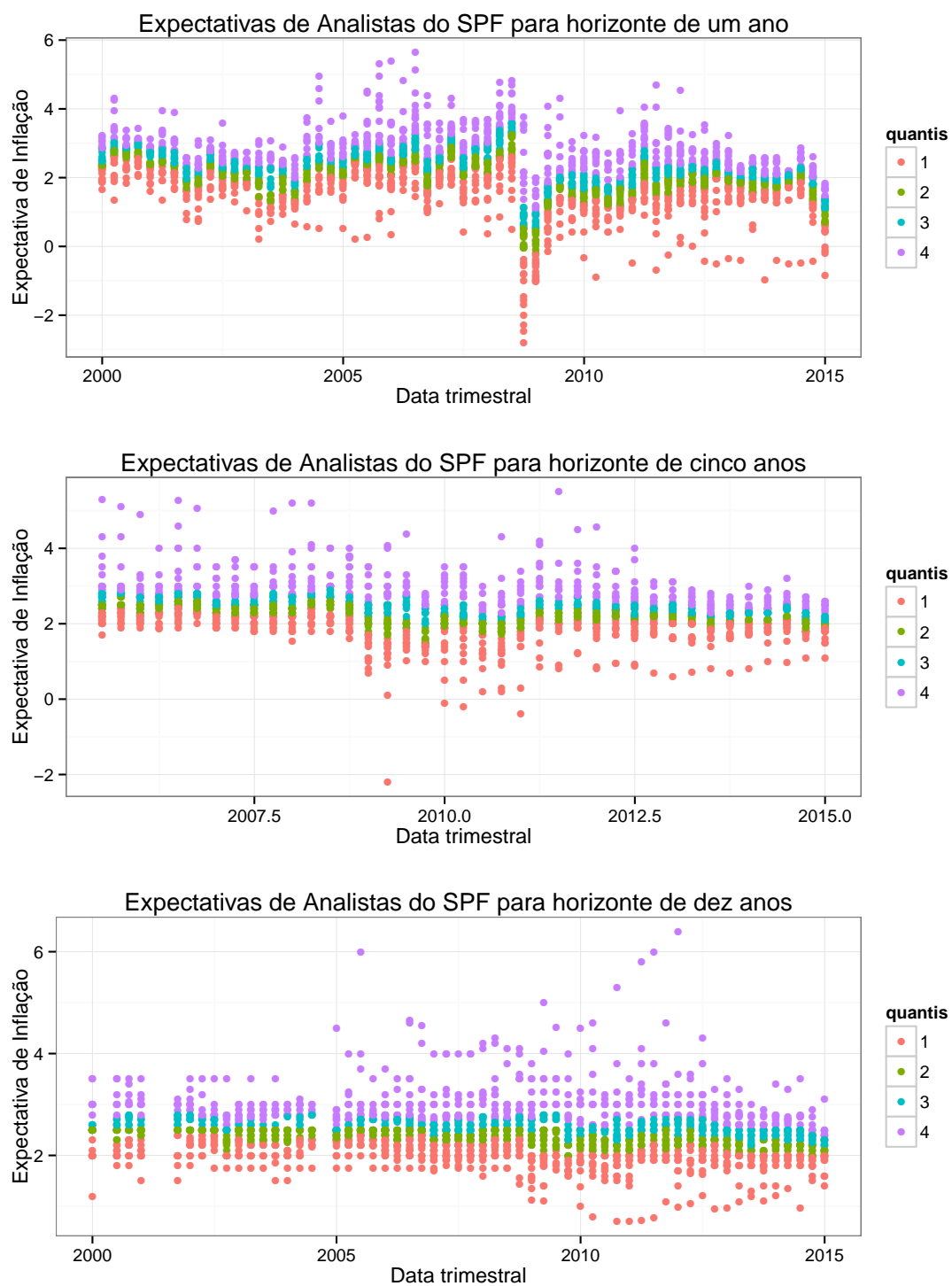


Figura 3.1: Distribuições de expectativas de analistas do SPF ao longo do tempo

Capítulo 4

Análise Empírica

Neste capítulo algumas análises empíricas são apresentadas com objetivo de caracterizar como as medidas de expectativa de inflação implícita (EII) se relacionam com as expectativas de analistas divulgadas pelo SPF. Para utilizar os modelos teóricos desenvolvidos, em uma primeira aproximação, é possível interpretar que o valor pago pelo ativo de risco, z , é a inflação no futuro. Assim, as expectativas sobre o payoff futuro do ativo seriam expectativas de inflação. Nesse caso, também é preciso supor que os dados de expectativas do SPF são representativos da distribuição de expectativas dos participantes do mercado de títulos nominais e reais. A aproximação pelo modelo teórico não é inteiramente desconectada da realidade. Se um participante do mercado acredita que a inflação está subprecificada, então ele pode “comprar inflação” montando uma posição short no título nominal e outra long no título indexado à inflação. Por um argumento similar, ele também poderia “vender inflação”. Uma outra interpretação do modelo seria considerar o retorno real do título nominal como o incerto, pois depende da realização da inflação. Assim, o payoff do ativo de risco seria $z = (1 + i)/(1 + \pi)$, onde i é a taxa de juros nominal e π é a inflação. Como a taxa de juros nominal é conhecida no momento em que o ativo de risco é comprado, o componente aleatório viria da inflação e, em última análise, expectativas sobre o pagamento z seriam expectativas sobre a inflação. Ainda nesse contexto, efeitos de restrições ao short-selling teriam efeitos sobre o preço e, conseqüentemente, sobre o yield do título nominal.

4.1 Correlação entre quartis do SPF e EII

Como primeira análise, foi observada a correlação de cada quartil das distribuições do SPF com as medidas de expectativa de inflação implícita. O resultado qualitativo é o padrão apresentado pela figura 4.2, isto é, para os prazos de um e cinco anos a correlação atinge o seu valor máximo no quartil 25% e decai para o valor mínimo no quartil 100%. Para o BEI no prazo de dez anos o padrão não é tão claro, com muitos valores cuja correlação não é estatisticamente significativa. Já nas duas decomposições do BEI no prazo de dez anos, a correlação com o quartil 25% continua se destacando.

Não somente a correlação é maior como a maioria das medidas de EII está mais próxima em nível do quartil 25%. A figura 4.1 mostra a análise de RMSE¹ entre os quartis do SPF e medidas de EII. Somente para as decomposições AACM a mediana é mais próxima do que o quartil 25%.

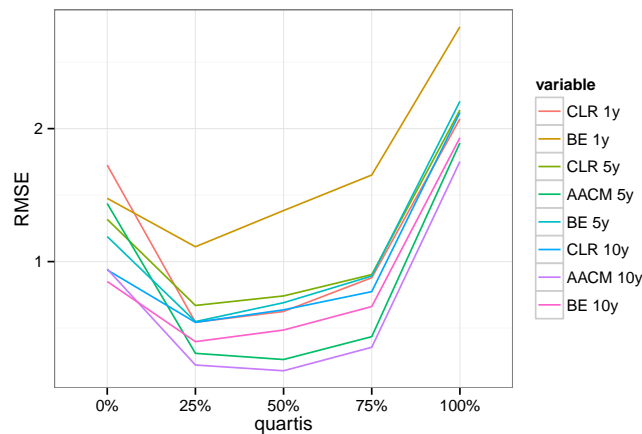


Figura 4.1: Valores do RMSE entre medidas de expectativa de inflação implícita e quartis do SPF.

Se os dados do SPF são representativos das expectativas dos participantes do mercado de títulos, então o BEI e a decomposição CLR não se aproximam da média das expectativas, mas sim do quartil 25%. Por outro lado, é possível conjecturar que a distribuição dos participantes do mercado seja substancialmente diferente da distribuição de expectativas de analistas do SPF. Por algum motivo a média dos

¹O RMSE (*root mean square error*) entre duas séries x_t e y_t , cada uma com n observações, é dado por $\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (x_t - y_t)^2}{n}}$

participantes de mercado poderia ser menor do que a média do SPF. Na parte teórica foi visto que as fricções podem resultar em uma sub(sobre)precificação do ativo, fazendo com que algum outro momento ou quartil da distribuição, além da média, também determine o preço. Deste modo é possível que, mesmo com a presença de fricções no mercado, a metodologia de decomposição “confunda” a distorção resultante das fricções como prêmio de risco ou liquidez. Assim, mesmo com as fricções a decomposição poderia errar na estimação dos prêmios e acertar a expectativa embutida nos preços.

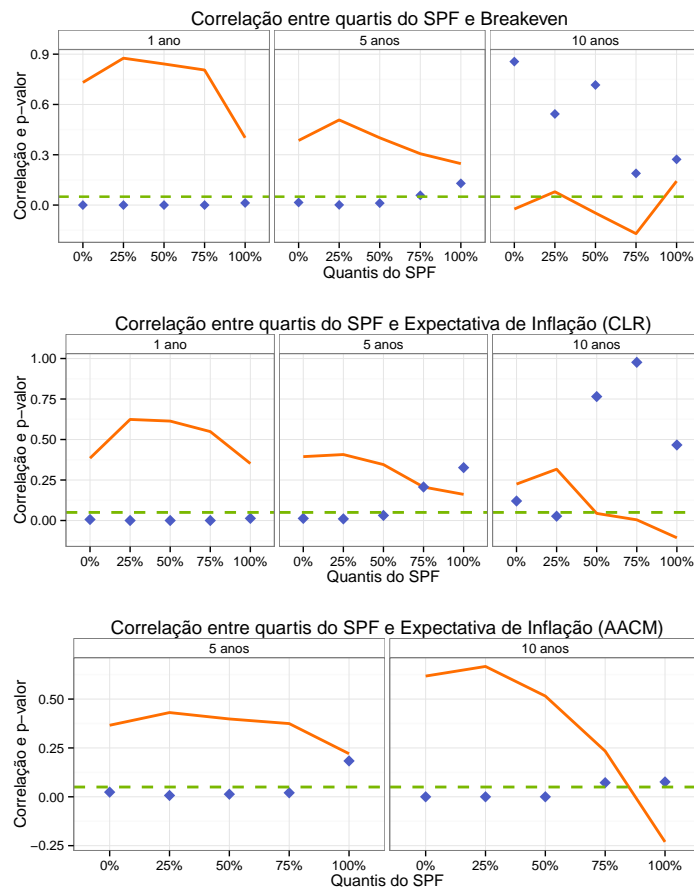


Figura 4.2: Correlações entre quartis do SPF e medidas de expectativa de inflação implícita. A correlação é a linha laranja, o p-valor é representado pelos pontos azuis e o nível de 5% é representado pela linha verde tracejada. Valores e número de observações estão no apêndice

Observando as figuras 4.1 e 4.2 fica evidente que a cauda esquerda da distribuição se destaca em termos de proximidade e correlação com as expectativas implícitas. Esse fato parece apontar para alguma fricção de mercado importante.

Como foi descrito na seção teórica, no caso de crenças heterogêneas sem custos de transação e sem restrição ao short-selling, o único parâmetro da distribuição de expectativas que determina o preço do ativo de risco é a média. Quando existe um custo fixo para realizar o short é criada uma fronteira que exclui participantes com opiniões “fracas”. A cada instante observado, os parâmetros de mercado e da distribuição mudam, o que também faz com que essa fronteira se mova ao longo do tempo. A partir dessa descrição é possível produzir uma hipótese para o comportamento observado. Interpretando o valor pago pelo ativo de risco, z , como a inflação no futuro. Movimentos nas expectativas sobre o payoff futuro do ativo, isto é expectativas de inflação, seriam refletidos em movimentos no preço do ativo. Portanto, numa situação com agentes heterogêneos e custos de transação é possível que o efeito de movimentos na fronteira dominem as demais forças sobre o preço. Nesse caso, o preço do ativo estaria mais correlacionado com as caudas do que com partes centrais da distribuição de expectativas.

4.2 Correlação entre dispersão do SPF e EII

Em seguida, foi observado como as medidas de expectativa de inflação implícita se correlacionam com a dispersão das distribuições do SPF. Como medidas de dispersão foram utilizadas o desvio padrão, median absolute deviation (MAD), coeficiente de variação (CV), quartile coefficient of dispersion (QCD) e o coeficiente de Gini. As definições das medidas menos convencionais estão no apêndice. Em especial, o coeficiente de variação, o QCD e o coeficiente de Gini são medidas adimensionais e, por isso, não estão relacionadas à unidade de medida.

O padrão é bem claro. A dispersão de expectativas no SPF é negativamente correlacionada com a expectativa implícita. O padrão fica um pouco alterado quando utiliza-se o BE no prazo de 10 anos, nesse caso as correlações não apresentaram significância estatística ao nível de 5%. Similarmente, utilizando a decomposição AACM, o prazo de 5 anos não é estatisticamente significativo, exceto para a dispersão medida pelo coeficiente de variação pelo Gini. A robustez dos resultados é uma evidência significativa contra modelo de crenças heterogêneas e ausência de restrições ao short-selling, uma vez que nesse modelo o preço não é influenciado pela

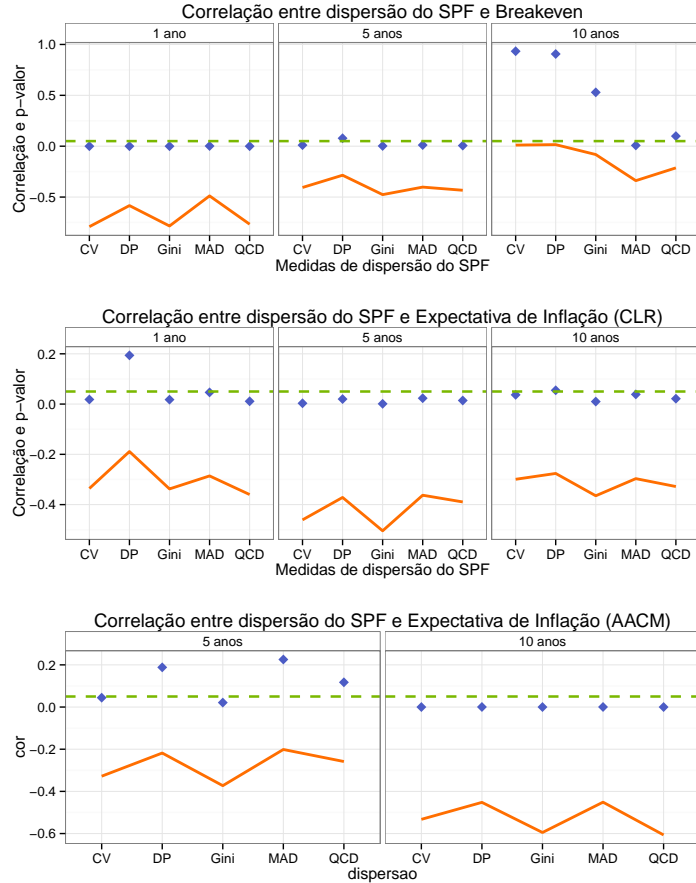


Figura 4.3: Correlações entre medidas de dispersão do SPF e medidas de expectativa de inflação. A correlação é a linha laranja, o p-valor é representado pelos pontos azuis e o nível de 5% é representado pela linha verde tracejada. Valores e número de observações estão no apêndice

dispersão da distribuição de μ , mas apenas pela variância da distribuição pessoal dos investidores. No entanto, não podemos excluir o caso em que a dispersão da distribuição de μ é positivamente correlacionada com a variância da distribuição individual dos investidores, σ^2 . Assim, a correlação observada poderia ser indireta, por meio da correlação entre dispersão das expectativas e dispersão da distribuição individual. No momento, não há como avaliar essa hipótese empiricamente, pois não foram encontrados dados da dispersão de expectativa individual. Um outro canal indireto que poderia explicar a correlação observada seria caso a média fosse correlacionada com a dispersão. Para avaliar esse caso, as medidas de EII foram regredidas na média, desvio padrão, skewness e kurtosis da distribuição do SPF. As tabelas contendo as regressões podem ser encontradas no apêndice. Em alguns

casos, o coeficiente do desvio padrão passou a ser não significativo. No entanto, para os demais casos foram encontrados coeficientes negativos, controlando para a média, skewness e kurtosis da distribuição.

4.3 Precisão das expectativas

Essa seção analisa quais medidas mostraram melhor desempenho de previsão da inflação. Para tal, foi feita uma análise do RMSE de medidas de expectativa de inflação com a inflação realizada. Foram utilizados os quartis e média do SPF, além das medidas de expectativas implícitas de mercado.

	Distribuição do SPF						Expectativa implícita		
	0%	25%	50%	75%	100%	Média	CLR	AACM	BE
1 ano	2.239	1.467	1.397	1.415	2.037	1.39	1.542		2.165
Obs.	57	57	57	57	57	57	45		30
5 anos	1.172	0.413	0.564	0.815	2.488	0.618	0.716	0.462	0.941
Obs.	19	19	19	19	19	19	28	40	32
10 anos	0.698	0.150	0.159	0.346	1.179	0.183	0.192	0.218	0.551
Obs.	21	21	21	21	21	21	9	20	21

Tabela 4.1: Cálculo do RMSE de medidas de expectativa de inflação com a inflação realizada no período. O número de observações se encontra logo abaixo do valor do RMSE. Foram utilizados valores anualizados

A tabela 4.1 mostra que, para o horizonte de um ano, a série contendo a média do SPF foi a que esteve mais próxima da inflação realizada, seguida pelo quartil 50% (mediana) e pelo 25%. Por outro lado, para o horizonte de cinco anos, o quartil 25% apresentou o menor RMSE. Para o horizonte de 10 anos o quartil 25% também apresentou o menor RMSE. Os gráficos das séries temporais de previsões e inflação realizada podem ser encontrados no apêndice. Pela tabela 4.1 fica evidente que com o aumento do horizonte a magnitude do erro diminui, o que indica que os preços estão razoavelmente estáveis em horizontes longos e as expectativas de longo prazo estão relativamente ancoradas. Um problema enfrentado nessa análise é que

as diversas séries utilizadas possuem pontos de início distintos. Assim, o número de observações de cada série varia consideravelmente e, de certa forma, impede uma comparação precisa entre séries de expectativa de inflação. De qualquer forma, é interessante indagar por que nem a média nem a mediana apresentaram os melhores e resultados de previsão, pela métrica do RMSE, e se existe algum mecanismo que dê incentivos aos analistas superestimarem ligeiramente suas previsões.

Capítulo 5

Conclusão

A principal ideia exposta neste trabalho é que mesmo com um simples modelo de crenças heterogêneas e custos assimétricos de long e short é possível que a média não seja o único parâmetro da distribuição de expectativas que afete o preço. Efeitos como a fronteira de participação gerada por custos fixos fazem com que algum quantil ou momento da distribuição também influenciem a determinação do preço. Por isso, tentativas de decomposição do BEI e interpretações da informação contida nos preços deveriam levar em conta possíveis efeitos da heterogeneidade de opiniões sobre o preço, observando outros momentos além da média da distribuição. Por exemplo, é possível que um aumento na variância da distribuição de expectativas afete o preço do título sem que isso signifique uma mudança na opinião média dos participantes do mercado. Se a hipótese teórica aqui esboçada for verdadeira, e de impacto significativo, provavelmente tentativas de estimação da expectativa de inflação implícita que utilizem dados de surveys poderiam ser aprimoradas adicionando-se outros momentos ou quantis da distribuição ao modelo. De maneira mais geral, os resultados sugerem que reduzir as expectativas de inflação a um único parâmetro unidimensional da distribuição pode resultar em uma perda excessiva de informação. Uma interpretação mais rica da expectativa de inflação como a própria distribuição de expectativas poderia ser proveitosa para entender as nuances do mercado. A seguir são listadas alguns outros pontos relevantes deste trabalho.

No campo teórico, foi visto como existem diversas maneiras de modelar restrições ao short-selling em um mercado com agentes com crenças heterogêneas. Em particular, foi visto que a escolha de como modelar os custos implica em diferentes

resultados a respeito da sobre(sub)precificação em relação ao caso sem restrições. Grosso modo, ao tratar as restrições como custos de transação a situação mais realista é que existem custos tanto para posições long quanto short, mas com o custo para short sendo significativamente maior do que o custo de comprar. Nessa descrição, o resultado de sobreprecificação do ativo de risco é ambíguo, dependendo principalmente da relação de magnitude entre os custos, do próprio nível de c_b , da distribuição de μ e do nível da oferta S . Dentro do conjunto de modelos estudados, ficou claro que existe uma diferença fundamental entre assumir que somente os praticantes de short enfrentam custos e assumir que existe uma diferença de magnitude significativa entre os custos de short e compra. Em pesquisas futuras seria interessante investigar as implicações de uma estrutura de custos mais realista (algo como custos côncavos na quantidade).

Já no campo empírico, foi constatado que existe um padrão de correlação dos quartis da distribuição do SPF com medidas de expectativa de inflação implícita, onde a cauda esquerda da distribuição, via de regra, é mais correlacionada com a expectativa de inflação implícita, enquanto que a cauda direita e mediana apresentam os menores níveis de correlação. Também foram encontradas evidências expressivas de que a expectativa de inflação implícita é negativamente correlacionada com a dispersão de expectativas SPF. Esse fato é diretamente oposto ao modelo teórico com crenças heterogêneas na ausência de fricções, o que, somado ao padrão assimétrico de correlações do quartis do SPF, sugere uma importante fricção no mercado.

Referências Bibliográficas

- [1] ABRAHAMS, M., ADRIAN, T., CRUMP, R.K. e MOENCH, E. Decomposing Real and Nominal Yield Curves, Federal Reserve Bank of New York Staff Reports, No. 570, Fevereiro 2015.
- [2] ANUFRIEV, M.; TUINSTRA, J.. The impact of short-selling constraints on financial market stability in a heterogeneous agents model, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 37, p. 1523-1543, 2013.
- [3] BACK, Kerry. *Asset Pricing and Portfolio Choice Theory*. 1. ed. Oxford University Press, 2010. (Financial Management Association Survey and Synthesis Series)
- [4] BEBER, Alessandro; PAGANO, Marco. Short-Selling Bans Around the World: Evidence from the 2007-09 Crisis, *The Journal of Finance*, Vol. 68, p. 343–381, Fevereiro, 2013.
- [5] CHANG, Eric; CHENG, Joseph; YU , Yinghui. Short-sales Constraints and Price Discovery: Evidence from the Hong Kong Market, *The Journal of Finance*, Vol. 62, p. 2097–2121, Outubro, 2007.
- [6] CHERNOV, Mikhail; MUELLER, Philippe. The Term Structure of Inflation Expectations, *Journal of Financial Economics*, Vol. 106, p. 367–394, Novembro, 2012.
- [7] CHRISTENSEN, Jens; LOPEZ, Jose; RUDEBUSCH, Glenn. Inflation Expectations and Risk Premiums in an Arbitrage-Free Model of Nominal and Real Bond Yields, *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 42, 143-178, 2010.

- [8] D'AMICO, Stefania; KIM, Don H.; WEI, Min. Tips from TIPS: the informational content of Treasury Inflation-Protected Security prices, Finance and Economics Discussion Series, FEDS Working Paper No. 2014-24, 2014.
- [9] DIAMOND, Douglas W.; VERRECCHIA, Robert E. Constraints on short-selling and asset price adjustment to private information, Journal of Financial Economics, Vol. 18, p. 277-311, 1987.
- [10] HAUBRICH, Joseph; PENNACCHI, George; RITCHKEN, Peter. Inflation Expectations, Real Rates, and Risk Premia: Evidence from Inflation Swaps, The Review of Financial Studies, Vol. 25, p. 1588-1629, Maio, 2012.
- [11] JARROW, Robert. Heterogeneous Expectations, Restrictions on Short Sales, and Equilibrium Asset Prices, The Journal of Finance, Vol 35, p. 1105-1113, Dezembro, 1980.
- [12] JONES, Charles M.; LAMONT, Owen A. Short-sale constraints and stock returns, Journal of Financial Economics, Vol. 66, p. 207-239, Nov-Dez, 2002.
- [13] MILLER, Edward M. Risk, Uncertainty and Divergence of Opinion, Journal of Finance, Vol. 32, p. 1151-1168, Set., 1977.
- [14] PIAZZESI, Monika. Affine Term Structure Models, Handbook of Financial Econometrics, Volume 1. Capítulo 12, p. 691-766, Elsevier. 2010.

Apêndice A

Demonstrações

Proposição 1. *O preço de equilíbrio p_1 , que garante $D_1(p_1) = S$, é estritamente maior do que p_0*

Demonstração. Por absurdo, suponha que $p_1 = p_0$. Então vale $D_1(p_0) = S = D_0(p_0)$

$$D_1(p_0) = \int_{Rp_0}^{+\infty} \frac{\mu - Rp_0}{\gamma\sigma^2} f(\mu) d\mu = \int_{-\infty}^{Rp_0} \frac{\mu - Rp_0}{\gamma\sigma^2} f(\mu) d\mu + \int_{Rp_0}^{+\infty} \frac{\mu - Rp_0}{\gamma\sigma^2} f(\mu) d\mu = D_0(p_0)$$
$$0 = \int_{-\infty}^{Rp_0} (\mu - Rp_0) f(\mu) d\mu$$

No entanto, ao longo de todo intervalo de integração, o valor de $(\mu - Rp_0)$ é menor do que zero. Portanto, $\int_{-\infty}^{Rp_0} (\mu - Rp_0) f(\mu) d\mu < 0$ e o resultado é uma contradição.

Agora suponha, também por absurdo, que $p_1 < p_0$ de modo que $p_1 = p_0 - \epsilon > 0$. Isto é, o valor de ϵ é tal que $0 < \epsilon < p_0$. Se p_1 garante o equilíbrio, então $D_1(p_0 - \epsilon) = S = D_0(p_0)$ implica que

$$D_1(p_0 - \epsilon) = \int_{R(p_0 - \epsilon)}^{+\infty} \frac{\mu - R(p_0 - \epsilon)}{\gamma\sigma^2} f(\mu) d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu - Rp_0}{\gamma\sigma^2} f(\mu) d\mu = D_0(p_0)$$
$$\int_{R(p_0 - \epsilon)}^{+\infty} (\mu - R(p_0 - \epsilon)) f(\mu) d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu - Rp_0) f(\mu) d\mu$$

Para analisar melhor o produto entre o termo em parêntese e a função densidade, defina $t = \mu - R(p_0 - \epsilon)$, de modo que $\mu = t + R(p_0 - \epsilon)$.

$$\int_0^{+\infty} t f(t + R(p_0 - \epsilon)) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - R\epsilon) f(t + R(p_0 - \epsilon)) dt$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} tf(t+R(p_0-\epsilon))dt &= \int_0^{+\infty} tf(t+R(p_0-\epsilon))dt + \int_{-\infty}^0 tf(t+R(p_0-\epsilon))dt - R\epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+R(p_0-\epsilon))dt \\
0 &= \int_{-\infty}^0 tf(t+R(p_0-\epsilon))dt - R\epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+R(p_0-\epsilon))dt \\
&\int_{-\infty}^0 tf(t+R(p_0-\epsilon))dt = R\epsilon
\end{aligned}$$

No entanto, R e ϵ são ambos positivos, de modo que seu produto também é. Por outro lado, a densidade de μ é maior do que zero para qualquer número real. Portanto, $\int_{-\infty}^0 tf(t+R(p_0-\epsilon))dt < 0$ e o resultado anterior é uma contradição. Assim, necessariamente $p_1 > p_0$ para que o equilíbrio ocorra. \square

Proposição 2. *Quando os custos são quadráticos tais que $c_b = 0$ e $c_s > 0$, o preço de equilíbrio p_2 , que garante $D_2(p_2) = S$, é estritamente maior do que p_0 .*

Demonstração. Por absurdo, suponha que $p_2 = p_0$. Então vale $D_2(p_0) = S = D_0(p_0)$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{Rp_0} \frac{\mu - Rp_0}{2cR + \gamma\sigma^2} f(\mu)d\mu + \int_{Rp_0}^{+\infty} \frac{\mu - Rp_0}{\gamma\sigma^2} f(\mu)d\mu &= \int_{-\infty}^{Rp_0} \frac{\mu - Rp_0}{\gamma\sigma^2} f(\mu)d\mu + \int_{Rp_0}^{+\infty} \frac{\mu - Rp_0}{\gamma\sigma^2} f(\mu)d\mu \\
\int_{-\infty}^{Rp_0} \frac{\mu - Rp_0}{2cR + \gamma\sigma^2} f(\mu)d\mu &= \int_{-\infty}^{Rp_0} \frac{\mu - Rp_0}{\gamma\sigma^2} f(\mu)d\mu \\
\frac{1}{2cR + \gamma\sigma^2} &= \frac{1}{\gamma\sigma^2}
\end{aligned}$$

Que é claramente falso, pois tanto c quanto R são diferentes de zero.

Agora suponha, também por absurdo, que $p_2 < p_0$ de modo que $p_2 = p_0 - \epsilon > 0$. Isto é, o valor de ϵ é tal que $0 < \epsilon < p_0$. Se p_2 garante o equilíbrio, então $D_2(p_0 - \epsilon) = S = D_0(p_0)$ implica que

$$\frac{\gamma\sigma^2}{2cR + \gamma\sigma^2} \int_{-\infty}^{R(p_0-\epsilon)} (\mu - R(p_0-\epsilon))f(\mu)d\mu + \int_{R(p_0-\epsilon)}^{+\infty} (\mu - R(p_0-\epsilon))f(\mu)d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu - Rp_0)f(\mu)d\mu$$

Para analisar melhor o produto entre o termo em parêntese e a função densidade, defina $t = \mu - R(p_0 - \epsilon)$, de modo que $\mu = t + R(p_0 - \epsilon)$.

$$\frac{\gamma\sigma^2}{2cR + \gamma\sigma^2} \int_{-\infty}^0 tf(t+R(p_0-\epsilon))dt + \int_0^{+\infty} tf(t+R(p_0-\epsilon))dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - R\epsilon)f(t+R(p_0-\epsilon))dt$$

$$\frac{-2cR}{2cR + \gamma\sigma^2} \int_{-\infty}^0 tf(t + R(p_0 - \epsilon))dt = -R\epsilon$$

No entanto, R e ϵ são ambos positivos, de modo que seu produto também é. Por outro lado, a densidade de μ é maior do que zero para qualquer número real. Portanto, $\int_{-\infty}^0 tf(t + R(p_0 - \epsilon))dt < 0$, de modo que o lado esquerdo da equação acima é positivo, enquanto que o lado direito é negativo. Ocorre, portanto, uma contradição. Assim, necessariamente $p_2 > p_0$ para que o equilíbrio ocorra. \square

Proposição 3. *Se os custos são quadráticos tais que $c_s = c_b > 0$, então o preço de equilíbrio p_2 , que garante $D_2(p_2) = S$, é estritamente menor do que p_0*

Demonstração. A demanda com custos quadráticos e simétricos é

$$D_2(p) = \int_{-\infty}^{Rp} \frac{\mu - Rp}{2cR + \gamma\sigma^2} f(\mu) d\mu + \int_{Rp}^{\infty} \frac{\mu - Rp}{2cR + \gamma\sigma^2} f(\mu) d\mu = \frac{1}{2cR + \gamma\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu - Rp) f(\mu) d\mu$$

$$D_2(p) = \frac{E[\mu] - Rp}{2cR + \gamma\sigma^2}$$

Para $\epsilon \neq 0$, no equilíbrio ocorre $D_2(p_0 + \epsilon) = S = D_0(p_0)$

$$D_2(p_0 + \epsilon) = \frac{E[\mu] - R(p_0 + \epsilon)}{2cR + \gamma\sigma^2} = \frac{E[\mu] - Rp_0}{\gamma\sigma^2}$$

$$E[\mu] - Rp_0 - R\epsilon = \frac{2cR + \gamma\sigma^2}{\gamma\sigma^2} (E[\mu] - Rp_0)$$

$$\epsilon = \frac{\left(1 - \frac{2cR + \gamma\sigma^2}{\gamma\sigma^2}\right) (E[\mu] - Rp_0)}{R} = -\frac{2c}{\gamma\sigma^2} (E[\mu] - Rp_0) < 0$$

\square

Proposição 4. *Se os custos são quadráticos tais que $c_b > 0$ e $c_s = \lambda c_b$, onde $\lambda > 1$, então existem dois casos mutuamente excludentes para o preço de equilíbrio p_2 , que garante $D_2(p_2) = S$:*

(i) *Se $\frac{2c_b \lambda R + \lambda \gamma \sigma^2}{2c_b \lambda R + \gamma \sigma^2} < \frac{\int_0^{+\infty} \mu f(\mu) d\mu}{|\int_{-\infty}^0 \mu f(\mu) d\mu|}$ então p_2 pode ser maior, menor ou igual a p_0 , dependendo do valor da oferta S ;*

(ii) *Caso contrário, $p_2 > p_0$ para qualquer S que garanta $D_0(p_0) = S$*

Demonstração. Defina $\Delta(p) = D_2(p) - D_0(p)$. A demonstração do item (i) se baseia nos seguintes fatos: (1) $\Delta'(p) > 0$, para todo p . Portanto Δ é uma função crescente. (2) $\Delta(E[\mu]/R) > 0$. (3) Se a condição do item (i) vale então $\Delta(0) < 0$. Os fatos (1)-(3) juntos mostram que se vale a hipótese de (i), então pelo teorema do valor intermediário existe um $p^* \in (0, E[\mu]/R)$ tal que $\Delta(p^*) = 0$. Assim, para $p < p^*$ ocorre $D_0(p) > D_2(p)$, e para $p > p^*$ ocorre $D_0(p) < D_2(p)$. Os fatos (1)-(3) são demonstrados em sequência:

(1) Vamos encontrar a derivada de Δ em relação a p . Pela regra de Leibniz segue que

$$\begin{aligned}\Delta'(p) &= \frac{1}{2c_s R + \gamma\sigma^2} \int_{-\infty}^{Rp} -Rf(\mu)d\mu + \frac{1}{2c_b R + \gamma\sigma^2} \int_{Rp}^{+\infty} -Rf(\mu)d\mu - \frac{-R}{\gamma\sigma^2} \\ &= \frac{-R}{2c_s R + \gamma\sigma^2} P(\mu < Rp) - \frac{R}{2c_b R + \gamma\sigma^2} P(\mu > Rp) + \frac{R}{\sigma\gamma^2} \\ &= \frac{R}{\sigma\gamma^2} - R \left(\frac{P(\mu < Rp)}{2c_s R + \gamma\sigma^2} + \frac{P(\mu > Rp)}{2c_b R + \gamma\sigma^2} \right) \geq \frac{R}{\sigma\gamma^2} - R \left(\frac{P(\mu < Rp)}{2c_b R + \gamma\sigma^2} + \frac{P(\mu > Rp)}{2c_b R + \gamma\sigma^2} \right) \\ &= \frac{2c_b R^2}{\gamma\sigma^2(2c_b R + \gamma\sigma^2)} > 0\end{aligned}$$

Agora vamos encontrar uma forma mais simplificada para $\Delta(p)$

$$\Delta(p) = \int_{-\infty}^{Rp} \frac{\mu - Rp}{2c_s R + \gamma\sigma^2} f(\mu)d\mu + \int_{Rp}^{+\infty} \frac{\mu - Rp}{2c_b R + \gamma\sigma^2} f(\mu)d\mu - \left(\frac{E[\mu] - Rp}{\gamma\sigma^2} \right)$$

Substituindo $c_s = \lambda c_b$, onde $\lambda > 1$

$$= \left(\frac{1}{2c_b R + \gamma\sigma^2} - \kappa \right) \int_{-\infty}^{Rp} (\mu - Rp) f(\mu)d\mu + \int_{Rp}^{+\infty} \frac{\mu - Rp}{2c_b R + \gamma\sigma^2} f(\mu)d\mu - \left(\frac{E[\mu] - Rp}{\gamma\sigma^2} \right)$$

Onde $\kappa = \frac{2c_b R(\lambda-1)}{(2\lambda c_b R + \gamma\sigma^2)(2c_b R + \gamma\sigma^2)} > 0$

$$\Delta(p) = \frac{-2c_b R}{\gamma\sigma^2(2c_b R + \gamma\sigma^2)} (E[\mu] - Rp) - \kappa \int_{-\infty}^{Rp} (\mu - Rp) f(\mu)d\mu$$

(2) Portanto, avaliando a função Δ no ponto $p = E[\mu]/R$

$$\Delta(E[\mu]/R) = \frac{-2c_b R}{\gamma\sigma^2(2c_b R + \gamma\sigma^2)} (E[\mu] - E[\mu]) - \kappa \int_{-\infty}^{E[\mu]} (\mu - E[\mu]) f(\mu)d\mu$$

$$= -\kappa \int_{-\infty}^{E[\mu]} (\mu - E[\mu])f(\mu)d\mu = -\kappa \int_{-\infty}^0 tf(E[\mu] + t)dt > 0$$

(3) Primeiro vamos encontrar uma forma simplificada para $\Delta(0)$

$$\begin{aligned} \Delta(0) &= E[\mu] \left(\frac{-2c_b R}{\gamma\sigma^2(2c_b R + \gamma\sigma^2)} \right) - \kappa \int_{-\infty}^0 \mu f(\mu)d\mu \\ &= \left(\frac{-2c_b R}{\gamma\sigma^2(2c_b R + \gamma\sigma^2)} - \kappa \right) \int_{-\infty}^0 \mu f(\mu)d\mu - \frac{2c_b R}{\gamma\sigma^2(2c_b R + \gamma\sigma^2)} \int_0^{+\infty} \mu f(\mu)d\mu \\ &= \frac{-2c_b \lambda R}{\gamma\sigma^2(2c_b \lambda R + \gamma\sigma^2)} \int_{-\infty}^0 \mu f(\mu)d\mu - \frac{2c_b R}{\gamma\sigma^2(2c_b R + \gamma\sigma^2)} \int_0^{+\infty} \mu f(\mu)d\mu \end{aligned}$$

Portanto, $\Delta(0) < 0$ se, e somente se

$$\begin{aligned} \frac{-2c_b \lambda R}{\gamma\sigma^2(2c_b \lambda R + \gamma\sigma^2)} \int_{-\infty}^0 \mu f(\mu)d\mu &< \frac{2c_b R}{\gamma\sigma^2(2c_b R + \gamma\sigma^2)} \int_0^{+\infty} \mu f(\mu)d\mu \\ \iff \frac{2c_b \lambda R + \lambda\gamma\sigma^2}{2c_b \lambda R + \gamma\sigma^2} &< \frac{\int_0^{+\infty} \mu f(\mu)d\mu}{|\int_{-\infty}^0 \mu f(\mu)d\mu|} \end{aligned}$$

□

Proposição 5. *Se a distribuição dos μ_i é normal e os custos são simétricos, então o preço de equilíbrio p_3 que garante $D_3(p_3) = S$ é estritamente menor do que p_0*

Demonstração. Suponha por absurdo que $p_3 = p_0$. Então $D_3(p_0) = D_0(p_0) - M(p_0, c) = S = D_0(p_0)$, o que implica em $M(p_0, c) = 0$. A equação (2.8) mostra que, para uma distribuição normal isso só seria possível se $Rp_0 = E[\mu]$. Mas como foi demonstrado na seção 2.2, no equilíbrio $p_0 = (E[\mu] - \gamma\sigma^2 S)/R$, o que implica que o custo de oportunidade é necessariamente menor do que a média da distribuição de μ_i . Mais precisamente, $Rp_0 = E[\mu] - \gamma\sigma^2 S$. Ocorre, portanto, uma contradição.

Agora, suponha por absurdo que $p_3 = p_0 + \epsilon$, onde $\epsilon > 0$. De modo que $D_3(p_0 + \epsilon) = D_0(p_0 + \epsilon) - M(p_0 + \epsilon, c) = D_0(p_0)$ implica em

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu - R(p_0 + \epsilon)}{\gamma\sigma^2} f(\mu)d\mu - M(p_0 + \epsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu - R(p_0)}{\gamma\sigma^2} f(\mu)d\mu$$

$$\begin{aligned} \frac{E[\mu] - R(p_0 + \epsilon)}{\gamma\sigma^2} - M(p_0 + \epsilon, c) &= \frac{E[\mu] - R(p_0)}{\gamma\sigma^2} \\ \frac{-R\epsilon}{\gamma\sigma^2} &= M(p_0 + \epsilon, c) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

O que implica em $M(p_0 + \epsilon, c) < 0$. No entanto, $M(p, c) < 0$ somente se $p > E[\mu]/R$. Isso ocorre, devido a simetria da normal e dos custos. Se $Rp < E[\mu]$, é possível ver pela equação (2.8) que $M(p, c) > 0$, uma vez que para todo $t \in (0, \sqrt{2\gamma\sigma^2 cR})$ ocorre $f(Rp + t) - f(Rp - t) > 0$. Simetricamente, se $Rp > E[\mu]$ então $M(p, c) < 0$. De modo que somente em $p = E[\mu]/R$ ocorre $f(Rp + t) = f(Rp - t)$ para todo $t \in (0, \sqrt{2\gamma\sigma^2 cR})$, o que implica em $M(E[\mu]/R, c) = 0$.

Por outro lado, se $p > E[\mu]/R$ não ocorre equilíbrio, pois implica em $D_3(p) < 0$. A interpretação é que existem mais agentes dispostos a realizar o short do que comprar uma quantia positiva do ativo de risco. Essa situação é insustentável, uma vez que para realizar o short é preciso pegar o ativo emprestado de algum agente que detenha uma quantia positiva desse ativo. Para ver isso, note que $D_3(p) < 0$ se, e somente se

$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{2\gamma\sigma^2 cR}} tf(Rp + t)dt + \int_{\sqrt{2\gamma\sigma^2 cR}}^{+\infty} tf(Rp + t)dt < 0 \quad (\text{A.2})$$

Como da densidade f é sempre não-negativa e o intervalo de integração está contido em $(-\infty, 0)$, a primeira integral é negativa. Por argumento semelhante, segunda integral é positiva. Pela simetria da função densidade da normal e dos custos, se $Rp < E[\mu]$ então

$$\left| \int_{-\infty}^{-\sqrt{2\gamma\sigma^2 cR}} tf(Rp + t)dt \right| < \int_{\sqrt{2\gamma\sigma^2 cR}}^{+\infty} tf(Rp + t)dt$$

Nesse caso, a equação (A.2) não é satisfeita. Por outro lado, se $Rp > E[\mu]$ então

$$\left| \int_{-\infty}^{-\sqrt{2\gamma\sigma^2 cR}} tf(Rp + t)dt \right| > \int_{\sqrt{2\gamma\sigma^2 cR}}^{+\infty} tf(Rp + t)dt$$

Então, vale a equação (A.2). Portanto, a equação (A.1) é absurdo. Então, necessariamente $p_3 < p_0$. \square

Apêndice B

Tabelas e Figuras

B.1 Medidas de dispersão

Seguem as definições, para uma variável aleatória discreta X , das medidas de dispersão menos convencionais:

- O median absolute deviation (MAD) é definido como

$$MAD(X) = \text{mediana}(|x_i - \text{mediana}(X)|)$$

- Sejam σ_x o desvio padrão de X e $E[X]$ a média de X . O Coeficiente de variação é

$$CV(X) = \sigma_x / E[X]$$

- Sejam Q_1 e Q_3 o primeiro e terceiro quartil, respectivamente. O quartile coefficient of dispersion (QCD) é

$$QCD = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

B.2 Tabelas e Figuras

Tabela B.1: Valores do gráfico com correlações entre quartis do SPF e medidas de expectativa de inflação implícita. O p-valor encontra-se abaixo do valor da correlação, entre parênteses.

EII	Horizonte	0%	25%	50%	75%	100%	Obs.
Breakeven	1 ano	0.731 (0.000)	0.876 (0.000)	0.842 (0.000)	0.806 (0.000)	0.401 (0.013)	38
	5 anos	0.385 (0.015)	0.508 (0.001)	0.401 (0.011)	0.306 (0.058)	0.247 (0.129)	39
	10 anos	-0.024 (0.856)	0.079 (0.543)	-0.048 (0.716)	-0.170 (0.189)	0.143 (0.273)	61
CLR	1 ano	0.385 (0.006)	0.624 (0.000)	0.614 (0.000)	0.549 (0.000)	0.352 (0.013)	49
	5 anos	0.394 (0.013)	0.407 (0.010)	0.345 (0.031)	0.207 (0.207)	0.161 (0.326)	39
	10 anos	0.225 (0.120)	0.317 (0.027)	0.044 (0.765)	0.004 (0.977)	-0.107 (0.466)	49
AACM	5 anos	0.366 (0.024)	0.431 (0.007)	0.398 (0.013)	0.375 (0.021)	0.220 (0.183)	38
	10 anos	0.618 (0.000)	0.667 (0.000)	0.515 (0.000)	0.234 (0.072)	-0.231 (0.076)	60

Tabela B.2: Valores do gráfico com correlações entre medidas de dispersão do SPF e medidas de EII. O p-valor encontra-se abaixo do valor da correlação, entre parênteses.

EII	Horizonte	CV	DP	Gini	MAD	QCD	N
Breakeven	1 ano	-0.791 (0.000)	-0.584 (0.000)	-0.784 (0.000)	-0.488 (0.002)	-0.767 (0.000)	38
	5 anos	-0.406 (0.010)	-0.285 (0.078)	-0.476 (0.002)	-0.402 (0.011)	-0.433 (0.006)	39
	10 anos	0.011 (0.933)	0.015 (0.906)	-0.082 (0.529)	-0.339 (0.008)	-0.213 (0.099)	61
CLR	1 ano	-0.336 (0.018)	-0.189 (0.194)	-0.338 (0.018)	-0.286 (0.046)	-0.360 (0.011)	49
	5 anos	-0.461 (0.003)	-0.372 (0.020)	-0.504 (0.001)	-0.363 (0.023)	-0.389 (0.014)	39
	10 anos	-0.299 (0.037)	-0.276 (0.055)	-0.365 (0.010)	-0.297 (0.038)	-0.328 (0.021)	49
AACM	5 anos	-0.328 (0.044)	-0.218 (0.188)	-0.373 (0.021)	-0.201 (0.226)	-0.258 (0.117)	38
	10 anos	-0.533 (0.000)	-0.452 (0.000)	-0.595 (0.000)	-0.451 (0.000)	-0.607 (0.000)	60

Tabela B.3: Valores do RMSE entre a variável de expectativa implícita descrita na primeira coluna e quartil ou média do SPF

Expectativa	Quartis do SPF					Média	N. Obs.
	0%	25%	50%	75%	100%		
Implícita							
CLR 1y	1.73	0.54	0.63	0.88	2.07	0.65	49
BE 1y	1.48	1.11	1.38	1.65	2.76	1.37	37
CLR 5y	1.32	0.67	0.74	0.90	2.14	0.75	39
AACM 5y	1.44	0.31	0.26	0.44	1.89	0.29	38
BE 5y	1.19	0.55	0.69	0.89	2.21	0.70	39
CLR 10y	0.94	0.54	0.64	0.77	2.12	0.65	49
AACM 10y	0.94	0.22	0.18	0.36	1.75	0.20	60
BE 10y	0.85	0.40	0.49	0.66	1.93	0.51	61

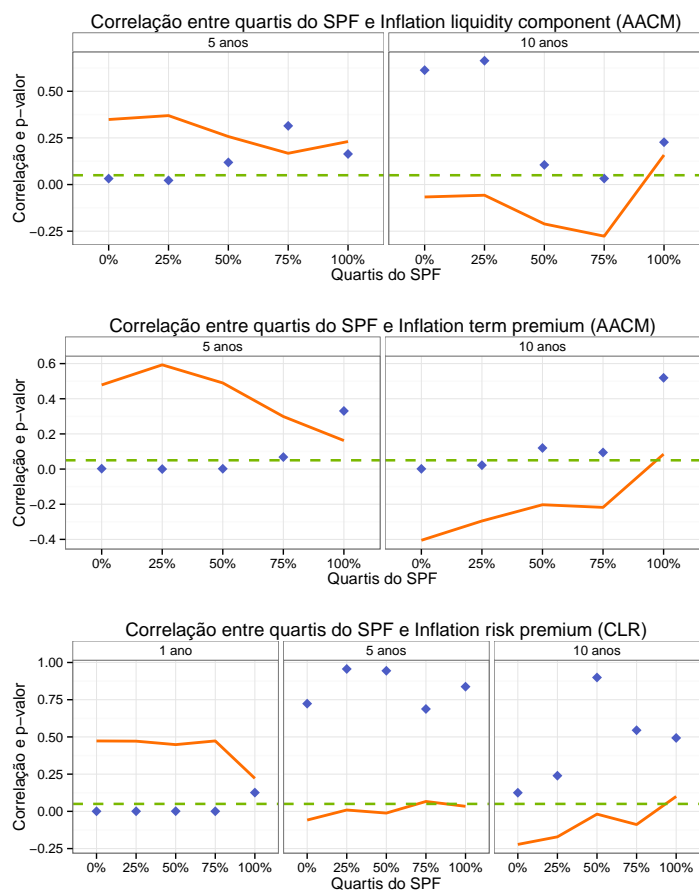


Figura B.1: Correlações entre quartis do SPF e demais componentes das decomposições AACM e CLR

Tabela B.4: Regressão do Breakeven na média, desvio-padrão, skewness e kurtosis da distribuição do SPF.

	<i>Breakeven:</i>		
	(1 ano)	(5 anos)	(10 anos)
Média	1.708*** (0.257)	0.684 (0.939)	-0.218 (0.598)
Desvio Padrão	-2.396*** (0.732)	-1.490** (0.732)	-0.595 (0.522)
Skewness	0.283 (0.220)	-0.045 (0.127)	-0.010 (0.135)
Kurtosis	0.054 (0.050)	0.099 (0.067)	0.059* (0.035)
Constant	-0.932 (0.918)	0.512 (2.062)	2.640* (1.559)
Obs.	38	39	61
R ²	0.806	0.373	0.135
Adj. R ²	0.783	0.299	0.074
Residual Std. Error	0.668	0.511	0.363
F Stat.	34.315***	5.049***	2.194*

Note: *p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

Tabela B.5: Regressões da expectativa de inflação pela decomposição CLR e AACM na média, desvio-padrão, skewness e kurtosis da distribuição do SPF.

	<i>Decomposição CLR:</i>			<i>Decomposição AACM</i>	
	(1 ano)	(5 anos)	(10 anos)	(5 anos)	(10 anos)
Média	0.694*** (0.169)	0.432 (0.845)	0.634 (0.713)	0.258 (0.369)	1.031*** (0.210)
Desvio Padrão	-0.068 (0.596)	-2.140*** (0.677)	-1.832*** (0.636)	-0.436* (0.248)	-0.817*** (0.178)
Skewness	-0.016 (0.142)	0.033 (0.159)	-0.160 (0.216)	0.007 (0.056)	-0.032 (0.053)
Kurtosis	0.012 (0.035)	0.078 (0.058)	0.103 (0.064)	0.025 (0.024)	0.012 (0.013)
Constante	0.252 (0.541)	1.683 (1.883)	1.006 (1.810)	1.702** (0.802)	0.170 (0.533)
Obs.	49	39	49	38	60
R ²	0.356	0.302	0.200	0.259	0.525
Adj. R ²	0.297	0.219	0.127	0.169	0.491
Residual Std. Er.	0.549	0.653	0.537	0.232	0.143
F Statistic	6.072***	3.671**	2.743**	2.882**	15.221***

Note:

*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

Tabela B.6: Estatísticas descritivas completas das séries de Breakeven em data trimestral

Maturidade	Janela	Min.	Mediana	Média	Máx.	DP	No. Obs.
1	0	-3.65	1.11	1.09	3.19	1.44	33
	5	-3.61	1.18	1.10	3.18	1.41	34
	10	-3.69	1.27	1.10	3.23	1.44	34
	15	-3.91	1.28	1.07	3.25	1.50	34
5	0	-0.47	1.98	1.93	2.75	0.58	49
	5	-0.46	1.98	1.94	2.72	0.56	53
	10	-0.39	1.98	1.94	2.71	0.57	53
	15	-0.44	1.97	1.92	2.69	0.58	53
10	0	0.95	2.26	2.15	2.70	0.38	52
	5	0.94	2.24	2.15	2.68	0.37	61
	10	0.92	2.25	2.14	2.68	0.37	61
	15	0.89	2.25	2.14	2.67	0.38	61

Tabela B.7: Estatísticas descritivas completas das séries de Expectativas Implícitas, pela de decomposição CLR, em data trimestral

Maturidade	Janela	Min.	Mediana	Média	Máx.	DP	No. Obs.
1	0	0.35	1.86	1.73	2.55	0.69	45
	5	0.35	1.74	1.72	2.58	0.66	49
	10	0.38	1.80	1.72	2.60	0.66	49
	15	0.38	1.81	1.71	2.62	0.65	49
5	0	-0.03	2.20	2.06	3.50	0.71	45
	5	0.04	2.14	2.05	3.58	0.68	49
	10	0.09	2.14	2.05	3.63	0.68	49
	15	0.29	2.14	2.05	3.71	0.67	49
10	0	0.77	2.26	2.13	3.66	0.60	45
	5	0.81	2.26	2.13	3.77	0.58	49
	10	0.84	2.26	2.13	3.85	0.58	49
	15	1.00	2.26	2.13	3.95	0.58	49

Tabela B.8: Estatísticas descritivas completas das séries de Expectativas Implícitas, pela de decomposição AACM, em data trimestral

Maturidade	Janela	Min.	Mediana	Média	Máx.	DP	No. Obs.
5	0	0.61	2.33	2.31	3.20	0.39	52
	5	0.58	2.39	2.38	3.24	0.41	61
	10	0.48	2.41	2.37	3.22	0.42	61
	15	0.26	2.39	2.37	3.23	0.44	61
10	0	1.70	2.33	2.32	2.80	0.20	52
	5	1.70	2.35	2.36	2.86	0.21	61
	10	1.69	2.36	2.36	2.85	0.21	61
	15	1.67	2.37	2.36	2.85	0.22	61

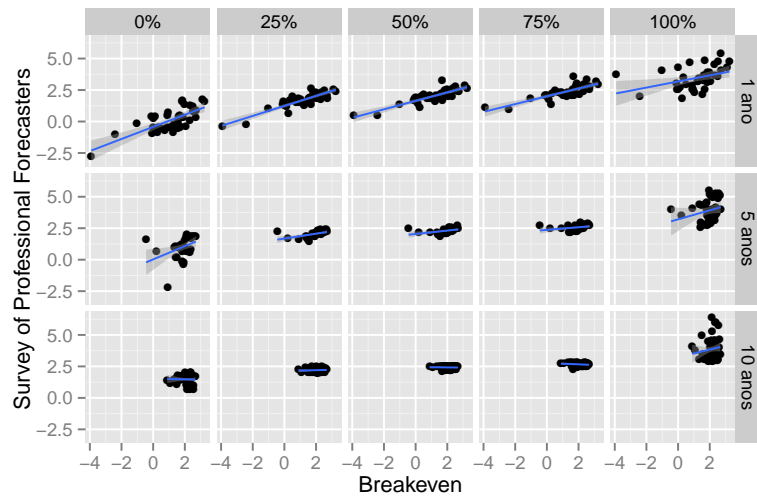


Figura B.2: Previsões do SPF contra Breakeven do Bloomberg

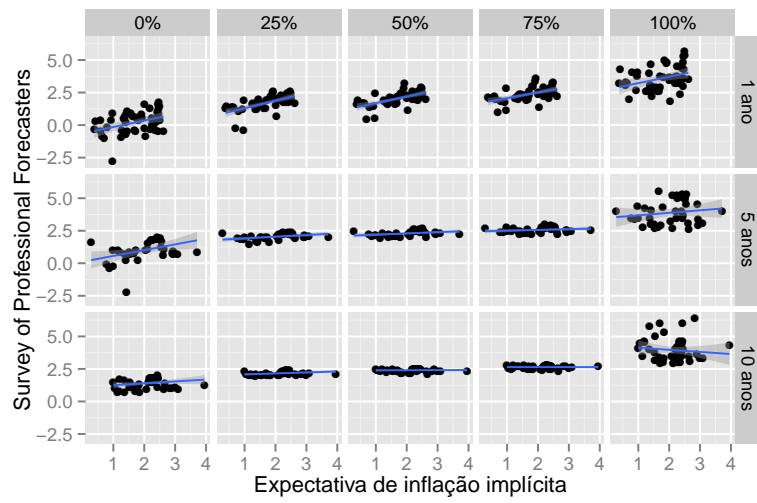


Figura B.3: Previsões do SPF contra expectativa de inflação implícita no mercado (decomposição CLR)

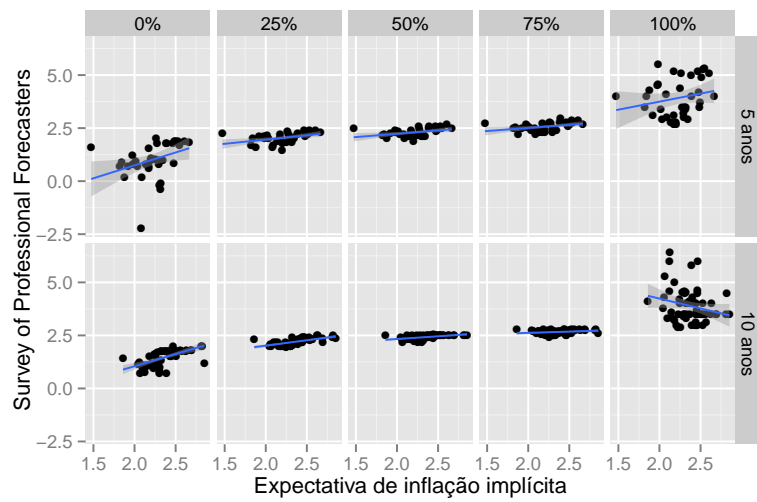


Figura B.4: Previsões do SPF contra expectativa de inflação implícita no mercado (decomposição AACM)

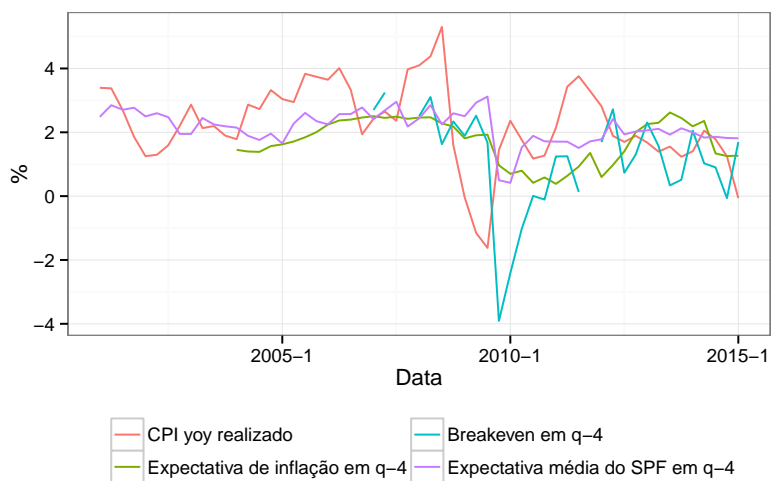


Figura B.5: Inflação realizada e inflação que era esperada para a data 4 trimestres atrás

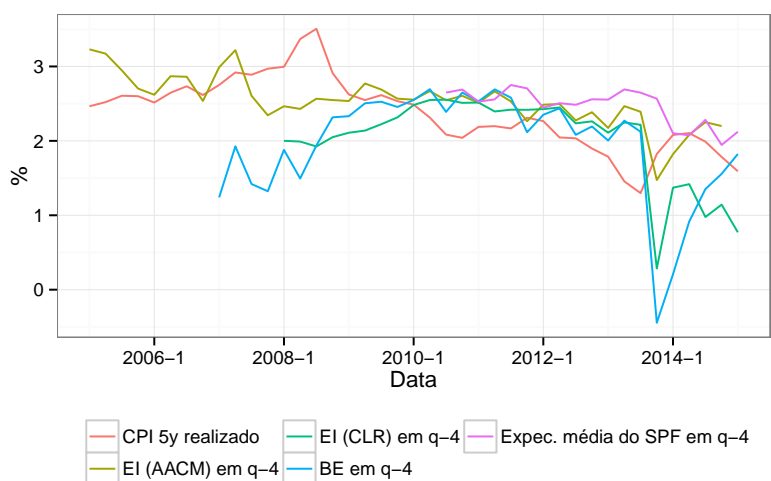


Figura B.6: Inflação realizada e inflação que era esperada para a data 20 trimestres atrás. Valores anualizados.

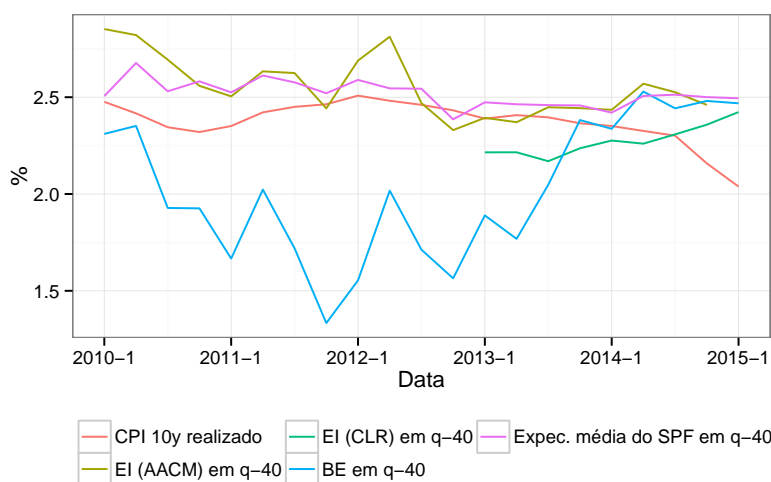


Figura B.7: Inflação realizada e inflação que era esperada para a data 40 trimestres atrás. Valores anualizados.