PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

UMA ANÁLISE SOBRE O MODELO BINOMIAL DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

João Corrêa Guimarães
N° de Matrícula: 0115010-7

Orientadora: Maria de Narareth Maciel

Dezembro de 2004

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

UMA ANÁLISE SOBRE O MODELO BINOMIAL DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

João Corrêa Guimarães
N° de Matrícula: 0115010-7

Orientadora: Maria de Narareth Maciel

Dezembro de 2004

"Declaro que o presente trabalho é de minha autoria e que não recorri para realizá-lo, a nenhuma fonte de ajuda externa, exceto quando autorizado pelo professor tutor".

Índice

1) Introdução

É sabido que o modelo mais utilizado para a precificação de opções é o modelo de Black & Scholes (1973). A extrema facilidade com que se obtêm quatro de suas cinco variáveis e a proximidade dos resultados encontrados com os preços praticados no mercado são as principais razões para o uso tão difundido deste método de precificação. No entanto, diversos trabalhos apontam vieses sistemáticos do modelo. A razão para o aparecimento destes vieses é simplesmente que o preço do ativo objeto pode não seguir uma distribuição lognormal (suposição do modelo de Black & Scholes, como será visto adiante). Hull (2001) faz um quadro resumo destes vieses, de acordo com o tipo de distribuição seguida pelo preço final do ativo objeto (comparada com a distribuição lognormal). Este quadro está reproduzido abaixo:

Comportamento da Distribuição	**Vieses**
Ambas as caudas mais finas	O modelo de Black & Scholes estabelece preços superiores para opções de compra e de venda fora e dentro do dinheiro
Cauda esquerda mais grossa e cauda direita mais fina	O modelo de Black & Scholes estabelece preços superiores para opções de compra fora do dinheiro e opções de venda dentro do dinheiro; e preços inferiores para opções de venda fora do dinheiro e opções de compra dentro do dinheiro
Cauda esquerda mais fina e cauda direita mais grossa	O modelo de Black & Scholes estabelece preços superiores para opções de venda fora do dinheiro e opções de compra dentro do dinheiro; e preços inferiores para opções de venda dentro do dinheiro e opções de compra fora do dinheiro
Ambas as caudas mais grossas	O modelo de Black & Scholes estabelece preços inferiores para opções de compra e

	de venda dentro e fora do dinheiro

Portanto, o objetivo deste trabalho será investigar a eficiência um modelo alternativo ao modelo de precificação de Black & Scholes: o modelo binomial. Tal modelo, como será visto, não faz assunções acerca da distribuição estatísticas do comportamento dos preços do ativo objeto, levando assim a resultados que independem da realidade destas hipóteses.

O trabalho está assim organizado: os dois capítulos seguintes à esta introdução dedicam-se a explicação dos dois modelos; o quarto capítulo cita como é o contrato de opções de compra da Telemar negociado diariamente na Bolsa de Valores de São Paulo; o quinto capítulo explora, hipoteticamente, os padrões da diferença nos preços obtidos através dos dois modelos em função do número de passos do modelo binomial; finalmente, o sexto capítulo explora a eficiência dos dois modelos para opções de compra da Telemar, escolhidas por terem a maior liquidez entre os contratos de opções negociados na Bovespa. Obviamente, o sétimo capítulo traz a conclusão do trabalho.

2) O modelo de Black & Scholes

Ao longo dos testes empíricos, iremos fazer o uso da equação diferencial de Black & Scholes. Esta é a forma mais utilizada para a precificação de opções. O modelo, apresentado em 1973 por Fischer Black e Myron Scholes, consiste em uma equação com as seguintes variáveis: preço do ativo objeto, preço de exercício da opção, tempo até o vencimento da opção, volatilidade do ativo objeto e a taxa livre de risco da economia. Seu grande mérito é utilizar-se de uma fórmula sem grandes complicações matemáticas ou estatísticas, em que todas as variáveis, exceto uma, a volatilidade, são facilmente observáveis.

Portanto iremos expor o modelo de modo a clarificar os métodos utilizados nos testes a serem conduzidos mais a frente. Nosso objetivo não é derivar a fórmula, e sim apresentar o arcabouço teórico e seus resultados.

Para a derivação da fórmula, Black e Scholes também partem de alguns pressupostos. É importante sabermos que pressupostos são estes, pois apesar de ser a forma mais utilizada para a precificação de opções, a equação de Black & Scholes também é um modelo. Assim, se seus pressupostos não forem suficientemente razoáveis, seus resultados também não o serão. A intenção aqui não é julgar se eles são razoáveis ou não, mas apresentá-los. São eles:

a) O preço do ativo objeto segue, em algum momento do futuro, uma distribuição lognormal. Nas palavras de Hull (2001), "uma variável possuirá distribuição lognormal se seu logaritmo natural for normalmente distribuído". Além disso, o retorno esperado e o desvio padrão do retorno esperado são constantes.

b) Os custos de transações e os impostos inexistem

c) Todos os títulos são perfeitamente divisíveis

d) Não há oportunidades de arbitragem sem risco

e) A negociação dos ativos é contínua

f) O ativo objeto não paga dividendos

g) A taxa de juros é constante e igual para todos s vencimentos

A FORMULÁ DE BLACK & SCHOLES

$C = S * N(D_1) – X e^{-r t} * N(D_2)$
$P = X e^{-r t} * N(- D_2) - S * N(- D_1)$

Em que: $D_1 = \frac{\ln (S/X) + (r + \sigma^2/2)*t}{\sigma t^{0,5}}$

$D_2 = \frac{\ln (S/X) + (r - \sigma^2/2)*t}{\sigma t^{0,5}}$

Esta é a fórmula de Black & Scholes, onde:

C é o preço de uma opçãp de compra

P é o preço de uma opção de venda

S é o preço do ativo objeto

Xe^{-rt} é o preço de exercício da opção trazido a valor presente

r é a taxa de juros livre de risco

t é o tempo para o vencimento da opção

σ é a volatilidade do preço do ativo objeto

N(x) " é a função de distribuição de probabilidade acumulada para uma variável que é distribuída normalmente, com média zero e desvio padrão 1(istó é, é a probabilidade de essa variável ser menor do que x)" (Hull, 2001)

N (d2) é a probabilidade de uma opção ser exercida num mundo neutro ao risco

N (d1) representa o delta do modelo (primeira derivada do preço da opção em relação ao preço do ativo objeto), isto é, a sensibilidade do preço da opção em relação ao preço do ativo

Um ponto importante é o de que, como o retorno esperado do ativo objeto não entra na fórmula, segue-se que a avaliação é neutra ao risco (este conceito será explorado mais à frente). Portanto, podemos supor que o retorno do ativo objeto é a taxa de juros livre de risco e que podemos descontar os fluxos futuros por esta taxa.

VOLATILIDADE

A volatilidade desempenha um papel fundamental na fórmula. Como todas as outras variáveis do modelo são facilmente observáveis, é, no fundo, a estimação da volatilidade que irá fazer com que o modelo possa chegar a resultados diferentes.

Um conceito muito importante é a volatilidade implícita. Como o nome já diz, esta é a volatilidade implícita na fórmula, ou seja, a volatilidade que o o modelo atribui ao preço do ativo objeto. Ao invés de inserirmos todos os dados na fórmula e chegarmos ao preço da opção, fazemos o contrário. Inserimos a taxa de juros livre de risco, o preço do ativo objeto, o preço de exercício da opção, o tempo para o vencimento da opção e o preço de mercado da opção, de modo a chegarmos a esta volatilidade implícita.

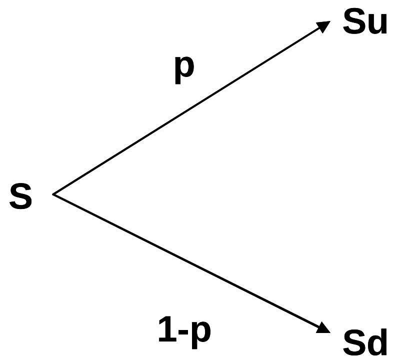
Se considerarmos que todo o mercado utiliza a equação de Black & Scholes para precificar as opções, então a volatilidade implícita indica o nível de volatilidade que o mercado está trabalhando para aquele determinado ativo objeto. No entanto, sabemos que esta suposição é um tanto quanto irrealista, dado que nem todos os participantes do mercado utilizam-se deste método.

Um dado intuitivo seria que opções sobre o mesmo ativo objeto, com a mesma data de vencimento, mas com preços de exercício diferentes teriam a mesma volatilidade implícita, dado que o preço do ativo objeto só seguirá um caminho no futuro. Isso levaria a um gráfico de preço de exercício e volatilidade implícita com formato horizontal, ou, pelo menos, muito próximo a isso. No entanto, isto nem sempre acontece, como está ilustrado no gráfico 1. Este problema é conhecido como o sorriso da volatilidade.

São problemas como este que podem evidenciar ineficiências no modelo e que chamaram a atenção do professor Rubinstein (1994) para testar a eficiência do modelo de Black & Scholes.

3) O Modelo Binomial

A mecânica do modelo binomial, introduzido por Cox, Ross e Rubinstein (1979), é inegavelmente mais simples do que modelo de Black & Scholes. Ele considera basicamente que, durante a vida da opção, isto é, desde o momento de seu lançamento até a sua data de vencimento, o preço do ativo objeto pode seguir duas direções, geralmente uma direção de alta e outra de queda. A figura abaixo resume o modelo:



Nesta representação, S é o preço inicial do ativo objeto, P é a probabilidade do preço do ativo objeto estar em Su na data de vencimento da opção e (1-p) é a probabilidade do preço do ativo objeto estar em Sd na data de vencimento da opção. Su e Sd são, obviamente, os dois preços possíveis do ativo objeto na data de vencimento da opção.

Para efeitos ilustrativos, considere que uma ação seja negociada a R$ 38 e ao final de um período de tempo arbitrário o preço desta ação possa estar tanto em R$ 41,80 quanto como R$ 34,20. Suponha ainda que esta ação não distribua dividendos e que a opção a ser avaliada seja uma opção de compra sobre esta ação, com o preço de exercício de R$ 40,00 e com vencimento justamente ao final deste período arbitrário de tempo.

Seguindo a ilustração descrita acima teremos, ao final do período, dois retornos possíveis para a opção:

a) Se o preço da ação for de R$ 41,80, a opção valerá exatos R$ 1,80.

b) Se o preço da ação for de R$ 34,20, a opção não terá valor algum.
Munidos destes dados e a partir de apenas duas suposições, poderemos avaliar qual seria o

preço desta *call*. As duas suposições são a ausência de arbitragens e a neutralidade do risco. Estas duas suposições é que permitem a avaliação do preço das opções pelo modelo binomial. Iremos aprofundá-las mais afrente, quando explicarmos formalmente o modelo.

O preço da opção será avaliado através da montagem de uma carteira com ações e opções. Esta carteira está comprada em D ações e vendida em uma call. Iremos calcular então, o valor de D, de modo que ao final do período, a carteira tenha o mesmo valor para as duas possíveis situações descritas acima. Se, no final do período, o preço da ação for de R$ 41,80, a posição comprada em ações valerá 41,80*D e a posição vendida em uma call valerá -1,80. Portanto o resultado final da carteira neste cenário será de 41,80*D-1,80. No entanto, se no final do período o preço da ação for de R$ 34,20, a posição comprada em ações valerá 34,20*D e a posição vendida em uma call valerá zero, sendo o resultado final da carteira para este cenário 34,20*D. Igualando o resultado final dos dois possíveis cenários, acharemos o valor de D, que será de 0,236842105.

Logo, a carteira definida estará comprada em aproximadamente 0,23 ações e vendida em uma opção. Se o cenário A prevalecer, o valor da carteira será de R$ 8,01 e se o cenário B prevalecer, este valor também será de R$ 8,01.

Supondo que a taxa de juros livre de risco é de 16% a.a e o período arbitrado é de 3 meses, o valor presente da carteira será de $8{,}01 * e^{-(0{,}16 * 0{,}25)}$, que será igual a 7,69.

Para acharmos o valor da opção, basta compararmos o valor da carteira no período inicial com o valor presente de seu resultado final, que é de R$ 7,69. Denotaremos o preço da opção por C. Portanto, como o preço da ação no período inicial era de R$ 38, C será dado pela seguinte equação:

$$38*D-C = 7{,}69$$
$$38*0{,}23-C = 7{,}69$$
$$C = 1{,}31$$

Portanto, o valor da estipulado para a opção pelo método binomial neste exemplo é de R$ 1,31. Se o preço da opção fosse maior do que isso, a carteira renderia mais do que a taxa de juros livre de risco e se fosse menor, o contrário ocorreria.

GENERALIZAÇÃO DO MODELO

O exemplo ilustrativo apresentado acima mostra como é o funcionamento básico do modelo binomial. Iremos então generelizar o modelo. Seguindo o mesmo esquema do exemplo apresentado, as variáveis a serem usadas serão:

- S: preço da ação no período inicial

- X: Preço de exercício da opção

- C: Preço da opção no período inicial

- Su: Preço de alta da ação ao final de um período

- Sd: Preço de baixa da ação ao final de um período

- u: Probabilidade de um movimento de alta no preço da ação, somado a 1

- d: Probabilidade de um movimento de baixa no preço da ação, cujo valor será subtraído ao número 1

- Cu: Retorno da opção caso o preço da ação vá para Su

- Cd: Retorno da opção caso o preço da ação vá para Sd

- r: Taxa de juros livre de risco da economia

Como foi dito anteriormente, o modelo binomial assume 2 suposições: a ausência de arbitragens e a neutralidade do risco. Esta última faz com que a taxa de juros livre de risco seja o retorno esperado para todos os títulos negociados e que os agentes não exijam compensação pelos riscos assumidos. Portanto, todos os pagamentos futuros podem ser trazidos a valor presente mediante ao desconto pela taxa de juros livre de risco. Já ausência de arbitragens impede que, por exemplo, o retorno esperado das ações seja maior do que o retorno da taxa de juros livre de risco. Esta suposição pode ser traduzida matematicamente por: $u > r > d$. Se esta relação fosse invertida para, por exemplo, $u > d > r$, os agentes sempre iriam preferir investir no ativo alternativo à taxa de juros livre de risco, pois, mesmo no pior cenário d, ele iria trazer um retorno maior do que r.

Considerando a mesma carteira comprada em D ações e vendida em uma opção de compra do exemplo anterior, iremos achar o D que torna o retorno da carteira o mesmo, tanto para o cenário de alta no preço da ação como para o cenário de queda neste. Portanto:

$$Su*D-Cu = Sd*D-Cd$$
$$D = (Cu-Cd) / (Su-Sd)$$

Seguindo os mesmos passos do exemplo anterior, o valor presente do primeiro cenário será de:

$$(Su*D-Cu)*e^{-(r*t)}$$

Igualando o valor presente do valor da carteira com o valor da carteira no período inicial, chegaremos ao valor da opção:

$$(Su*D-Cu)*e^{-(r*t)} = S*D-C$$
$$\text{logo,} \quad C = e^{-(r*t)} * \{ p*Cu + (1-p)*Cd\}$$
$$\text{onde,} \quad p = \{e^{-(r*t)} - d\} / (u-d)$$

Pelas equações acima, pode-se perceber que o valor da opção é seu valor esperado ao final do período, trazido a valor presente. Se replicarmos este raciocínio para o valor esperado do preço da ação e manipularmos as fórmulas, chegaremos a um resultado interessante:

$$E\,(St) = pSu + (1-p)Sd$$
$$E\,(St) = pS(u-d) + Sd$$

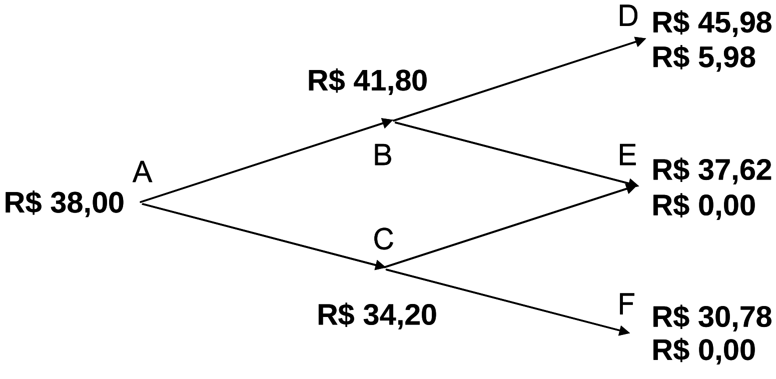
substituindo o p pela equação acima, chegaremos a $E\,(St) = S*e^{(r\,t)}$,. Ou seja, o valor esperado para o preço da ação em t é o seu valor hoje multiplicado pela taxa de juros livre de risco. Isto condiz perfeitamente com a hipótese de neutralidade do risco assumida antes de derivarmos o modelo: o retorno esperado para todos os ativos é a taxa de juros livre de risco da economia.

MAIS DE UM NÓ

Toda a teoria apresentada até agora diz respeito ao modelo binomial de um único passo. No entanto este modelo pode ser generalizado para diversos passos. Assim, no exemplo do início desta seção, poderiamos ter dividido o espaço de tempo de três meses para o vencimento da opção em 12 passos, cada um representando uma semana. Quanto maior o número de passos e mais curto o espaço de tempo entre eles, mais precisa será a precificação.

Assim como nas resoluções acima, começa-se a ressolver a árvore de trás para frente, pois os valores da opção no final da árvore são seus retornos.

Suponha o exemplo do início deste seção, só que acrescido de mais um período de 3 meses. Agora, no final dos dois períodos, há 3 resultados possíveis para o preço da ação: ele pode ficar em R$ 45,90, R$ 37,62 ou R$ 30,78. No primeiro caso, o valor da opção será de R$ 5,98. No segundo e no terceiro caso, será de zero. A representação da àrvore binomial segue abaixo (o primeiro preço é o da ação e o segundo é o da opção):



No nó C, o valor da opção será zero, pois os dois resultados possíveis posteriores são zero. Resta-nos calcular o valor da opção no nó B. De acordo com as fórmulas já apresentadas, p=0,70405387. Logo o valor da opção neste nó será de:

$$e^{-(0,16*0,25)} *(p*5,98) = R\$\ 4,045156187$$

Para chegarmos ao valor da opção no nó A usaremos novamente a mesma fórmula:

$$e^{-(0,16*0,25)} *(p*4,04) = R\$\ 2,736335882$$

OPÇÕES AMERICANAS

Até agora, toda a construção do modelo foi feita para opções européias, sejam elas de compra ou venda. No entanto, no caso da avaliação de uma opção americana, o modelo também pode ser usado. O avaliador deve começar do final, já que o retorno das opções não muda. As fórmulas apresentadas também são as mesmas, mas há uma ressalva: para cada nó do modelo, o preço da opção americana será dado pelo melhor valor entre o preço obtido pela fórmula e o valor obtido com o exercício antecipado.

Assim, no último exemplo, o valor da opção no nó B continua sendo R$ 4,04, pois o valor obtido com o exercício antecipado, R$ 1,80 é menor do que o obtido com a venda da opção. Portanto, o valor da opção no nó inicial A também seria o mesmo.

Caso ocorresse o contrário, ou seja, se o valor obtido com exercício antecipado da opção fosse maior que o valor da opção obtido com a fórmula, o preço da opção no nó B iria ser diferente, alterando também o valor da opção no nó A.

CONSIDERAÇÕES SOBRE O NUMERO DE NÓS E A VOLATILIDADE

Segundo Hull (2001), para uma precificação razoável pelo método binomial, é preciso construir árvores de pelo menos 30 nós.

Para uma boa precificação das opções, também precisamos estimar a variância do preço do ativo objeto, representada no modelo pelos parâmetros u e d. Não podemos simplesmente arbitrar os preços que o ativo objeto pode ter no futuro. Precisamos observar os padrões históricos no movimento do preço do ativo objeto. Hull (1997) mostra que se assumirmos uma distribuição lognormal para o preço do ativo objeto e utilizarmos a fórmula da variância desta distribuição conjulgada com mais uma restrição imposta por Cox, Ross e Rubinstein, a de que u = 1/d, chegaremos ao seguinte resultado:

$$u = e^{\sigma * (\Delta t)^{0,5}}$$

$$d = e^{- \sigma * (\Delta t)^{0,5}}$$

Aqui, σ representa a volatilidade no preço do ativo objeto.

Para os testes desenvolvidos no capítulo 6, escolhemos calcular a volatilidade a partir da série de preços do ativo objeto contemplando os retornos diários dos 60 dias anteriores ao dia corrente. Além disso, a fórmula de calculo da variância a ser utilizada será diferente da exposta acima. Utilizaremos a seguinte fórmula:

$$\text{Vol.} = DP * (252)^{0,5}$$

Onde:

DP = Desvio padrão do retorno diário do preço do ativo objeto

252 = número de dias úteis arbitrados para um ano

4) Algumas Características dos Contratos TNLP4 Negociados na Bovespa

As opções de compra (*call*) da Telemar (TNLP4) negociadas na Bovespa são do tipo americanas, isto é, o comprador destas opções pode, a qualquer momento entre a compra e o vencimento, exercer a opção. O exercício é físico, isto é, caso o comprador queira exercer a opção, o lançador terá que lhe vender a ação objeto. Sendo assim, a Bovespa faz uma seleção, através de sorteio, entre as posições lançadoras de opções de igual série da opção exercida caso isso ocorra.

As *calls* lançadas respeitam a seguinte nomeclatura: Código da ação objeto, acrescido de uma letra, que define qual é o vencimento da opção, e de um número, que representa o preço de exercício da opção. Apresentamos abaixo como as letras são usadas para indicar o vencimento das *calls*.

Letra	Vencimento
A	Janeiro
B	Fevereiro
C	Março
D	Abril
E	Maio
F	Junho
G	Julho
H	Agosto
I	Setembro
J	Outubro
K	Novembro
L	Dezembro

Assim, por exemplo, a opção TNLPD40, significa uma call sobre ações da Telemar (TNLP4) com preço de exercício de R$ 40,00 e vencimento em Abril.

Além disso, as opções são protegidas contra o pagamento de dividendos, juros sobre o capital próprio, outros proventos em dinheiro, bonificações, subscrições, fracionamentos, grupamentos e reorganizações que digam respeito à ação objeto ou ao seu emissor. Para cada uma destas modalidades, há uma forma de ajuste. Entretanto achamos que não convém explicar uma a uma. Vale, porém, explicar a modalidade mais importante, o pagamento de bonificações em dinheiro (dividendos, juros sobre capital próprio ou outros proventos em dinheiro). Caso isso ocorra, o preço de exercício é diminuído do valor da bonificação, a partir do dia seguinte ao pagamento. Por exemplo: se Paulo é detentor de uma opção de compra da Telemar com preço de exercício de R$40,00 e esta empresa pagou dividendos no valor de R$2,00, o preço de exercício ajustado da opção de Paulo passará a ser de R$38,00.

Em relação ao risco de os lançadores não possuírem a ação objeto, há duas medidas preventivas: a sociedade corretora do lançador deve depositar na Companhia Brasileira de Liquidação e Custódia (CBLC) a totalidade da quantia de ações especificada no contrato ou fazer o depósito de margens exigido pela CBLC. O primeiro caso é chamado de lançamento coberto e o segundo de lançamento descoberto. Se a segunda opção for escolhida, o lançador pode ser chamado a recompor a margem, caso esteja tendo prejuízo. O cálculo das margens é feito através de um sistema da CBLC chamado de Clearing Members Theoretical Intermarket Margin System (CM-TIMS). Dois componentes são levados em conta para este calculo: margem de prêmio, que nada mais é do que o preço de fechamento do ativo objeto, e a margem de risco, que é o cenário hipotético em que há a ocorrência das maiores perdas ao lançador dentre 10 casos adversos a ele no preço do ativo objeto.

5) Comparando Teoricamente o Modelo Binomial com o Modelo de Black & Scholes

Explicados os modelos, iremos nos voltar agora para a comparação numérica de ambos. O objetivo deste capítulo será analisar a convergência dos preços gerados pelos dois modelos. Exploraremos esta diferença acerca do número de passos seguidos pelo modelo Binomial em função da *Moneyness* das opções. Este último conceito ainda não foi explicado. Portanto, começaremos explicando-o para depois realizarmos a pesquisa.

As opções podem ser classificadas por um conceito muito simples chamado de *Moneyness*. Ele é simplesmente a comparação do valor do ativo objeto com o valor presente do preço de exercício da opção, descontado pela taxa de juros livre de risco. A fórmula da *Moneyness* é a seguinte:

$$\text{MONEYNESS} = \left[\frac{S}{Xe^{-r*t}} - 1 \right] \times 100$$

Diz-se que a opção está *In the Money* (dentro do dinheiro) se o valor presente do preço de exercício da opção, descontado pela taxa de juros livre de risco é menor do que o preço de mercado do ativo objeto. Ou seja, o resultado da fórmula apresentada acima será positivo. Portanto, o titular de uma opção de compra terá a oportunidade de comprar o ativo objeto a um preço (descontado pela taxa de juros livre de risco) mais barato do que o preço negociado pelo mercado para o mesmo ativo. Se a opção está *At the Money* (no dinheiro), estes dois preços serão iguais. E, finalmente, diz-se que a opção está *Out of the Money* (fora do dinheiro) se o preço de Mercado do ativo objeto (descontado pela taxa de juros livre de risco) é menor do que o valor presente do preço de exercício da opção.

Na realidade, definiremos bandas arbitrárias para cada uma das três classificações, pois é muito difícil que uma opção seja classificada exatamente como *At the Money.* As bandas seguirão os mesmos percentuais utilizados por Donangelo, Lemgruber e Silva (2001). São elas:

Classe	Bandas
IN THE MONEY	Maior do que 5%
AT THE MONEY	Entre -5% e 5%
OUT OF THE MONEY	Menor do que 5%

Esta classificação é muito importante, pois simplifica toda a análise e segundo nos mostra a monografia de final de curso de Marcel Scharth Figueiredo (2003), a liquidez das opções e os *payoffs* obtidos pelos titulares e lançadores das opções estão intimamente relacionados com a *Moneyness* da opção. Além disso, os testes de eficiência dos modelos, a serem realizados no capítulo 6 também se utilizarão deste conceito.

Agora, poderemos iniciar a pesquisa proposta. Iremos mostrar a diferença percentual na precificação de opções pelos dois modelos em função do número de passos seguidos pelo modelo Binomial, para cada classe de *Moneyness*. Achamos irrelevante repetir o procedimento usando diferentes taxas de juros, volatilidade e tempo para o vencimento, pois estas variáveis afetam a precificação pelos dois modelos. Sendo assim, estudar estas variáveis seria o mesmo que estudar a sensibilidade de cada modelo à cada uma delas. A variável chave aqui é o número de passos do modelo binomial, que só afeta a precificação por este modelo.

Nas simulações desenvolvidas abaixo, os seguintes dados fictícios foram utilizados como base:

- Tipo de opção: Call

- Estilo da opção: Americana

- Preço de exercício do ativo objeto: R$ 100,00

- Taxa de juros livre de risco: 15% a.a.

- Número de dias para o vencimento das opções: 30 (o ano foi considerado como tendo 252 dias úteis)

- Volatilidade do ativo objeto: 40% a.a.

Analisaremos as três classes de *Moneyness* independentemente, para tentarmos perceber se o grau desta influencia a precificação. O resultado das simulações é apresentado nos gráficos 2, 3 e 4.

É bom explicar que para cada classe de Moneyness foram criados três valores diferentes, objetivando analisar se, mesmo dentro de determinada classe, há uma tendência.

Iremos começar nossa analise pelo gráfico das opções At the Money. Os preços do ativo objeto foram escolhidos propositalmente para estarem nos limites e no meio da banda arbitrada para a classe. Assim, o preço de R$ 93,33 corresponde a uma *Moneyness* de - 4,99%, estando no limite inferior da classe. Já os preços de R$ 98,23 e R$ 103,13 correspondem a uma *Moneyness* de 0,00% e 4,99% respectivamente.

Analisando os dados, podemos perceber que à medida que o número de passos do modelo binomial aumenta, a diferença entre a precificação dos dois modelos diminui. Este resultado já era de se esperar, inclusive para as outras classes de *Moneyness*, que também seguem este comportamento.

Também podemos perceber que, já a partir do sexto passo, o modulo desta diferença é inferior a 4,98% para os três níveis, permanecendo sempre abaixo disto na medida em que o número de passos aumenta. Aliado a isso, a partir do décimo quinto passo, exceto para o nível que representa o limite inferior da banda, onde o padrão da diferença parece se comportar de forma mais instável, a diferença entre a precificação dos dois modelos, para os outros dois níveis, têm sempre módulo inferior a um.

Tais análises nos levam a crer que, para opções At the Money, a precificação pelo modelo Binomial e pelo modelo de Black & Scholes convergem de forma bastante rápida e precisa.

Seguindo nossa analise, no caso das opções In the Money, foram utilizados preços do ativo objeto de modo que a *Moneyness* fosse sempre crescente. Assim, os preços de R$ 110,00, R$ 120,00 e R$ 130,00 representam *Moneyness* de 11,98%, 22,16% e 32,34% respectivamente.

Para esta classe de opções, percebe-se que a diferença entre os preços dados pelos dois modelos é mínima, independente do número de passos do modelo binomial. O pico do módulo desta diferença é de 3,42%, para a menor *Moneyness*. Além disso, pode-se claramente perceber que quanto maior é a *Moneyness*, maior e mais rápida é a convergência dos preços dados pelos dois modelos.

Finalmente, para as opções Out of the Money, foram escolhidos preços do ativo objeto de modo a fazer com que a *Moneyness* fosse sempre decrescente. Assim, escolhemos os preços de R$ 90,00, R$ 80,00 e R$ 70,00, gerando *Moneyness* de - 8,38%, - 18,56% e - 28,74%, respectivamente.

Como já era esperado, a opção mais Out of the Money iniciou a série com uma diferença de preço entre os dois modelos de zero, refletindo a precificação de zero atribuída pelo modelo binomial até o sexto passo. A medida em que se aumentou o número de passos do modelo binomial, esta opção foi ganhando valor. Entretanto, a diferença percentual de preços dada pelos dois modelos ainda continuou relativamente grande, dado que o preço desta opção estava bem próximo de zero, e qualquer variação seria percentualmente grande.

Para os outros dois valores de *Moneyness,* comportamento semelhante ao das opções In the Money foi verificado: quanto maior a *Moneyness*, maior e mais rápida foi a convergência dos preços atribuídos pelos dois modelos.

Chegamos então a seguinte conclusão: quanto maior é a *Moneyness,* maior é a convergência entre o preço da opção dado pelo modelo binomial e o preço da opção dado pelo modelo de Black & Scholes, independente da classe de *Moneyness* que a opção esteja.

6) Testando a Eficiência dos Dois Modelos

Explicados os modelos, iremos agora explicar a base de dados utilizada e os procedimentos numéricos dos testes a serem realizados.

BASE DE DADOS

A base de dados contempla opções de compra sobre ações da Telemar (TNLP4) negociadas no mercado da Bolsa de Valores de São Paulo entre os anos de 2000 e 2003, mais especificamente entre Janeiro de 2000 e Junho de 2003.

A única razão para que esta série não fosse maior e mais atual foi a dificuldade de obtenção dos dados em tempo hábil. Eles foram obtidos através de contato com Marcel Schart Figueiredo, autor de uma das monografias de final de curso que usamos como bibliografia (Figueiredo, 2003). Este obteve a base de dados diretamente com a Bovespa.

As opções foram precificadas nos modelos de Black & Scholes e binomial pelos modelos em Microsoft Excel desenvolvidos pelo *web site* www.risktech.com.br, formado através de uma parceria entre Unibanco, Sul América Investimentos e IBMEC. As volatilidades implícitas das opções também foram calculadas por um "add-in" do Microsoft Excel desenvolvido pelo *web site*. No entanto, este mecanismo apresentou limitações na estimação das volatilidades implícitas para algumas datas. Estes dados foram estimados então fazendo-se uso da função "atingir meta" do Microsoft Excel.

No entanto, para quatro datas específicas, nenhum dos dois mecanismos foi eficiente em calcular a volatilidade implícita. Portanto, estas quatro observações foram ignoradas nos teste. São elas: 25 de Julho de 2000, 27 de Abril de 2001, 14 de Janeiro de 2003 e 13 de Junho de 2003.

Em relação à taxa de juros, a referência utilizada foi o Certificado de Depósito Interbancário de um dia, obtido através do banco de dados da corretora Hedging Griffo, cuja base de dados é a CETIP. Fizemos a suposição de que o ano tem 252 dias úteis para transformar esta taxa diária em taxa anual.

A série histórica de preços do ativo objeto, ou seja, as ações de TNLP4, assim como seus proventos, foram obtidos através do banco de dados do sistema Economática. O preço de exercício das opções foi ajustado, pela própria Bovespa, à todos os proventos em dinheiro recebidos.

CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DO PRAZO DE VENCIMENTO DAS OPÇÕES E O ERRO MÉDIO DADO ENTRE OS PREÇOS DE MERCADO E OS MODELOS DE PRECIFICAÇÃO

Antes de explicarmos a metodologia dos testes e desenvolvermo-los, cabe investigarmos se o prazo de vencimento das opções não interfere no erro entre médio o preço de mercado das opções e os preços dados pelos modelos. Caso ocorra algum viés sistemático, teremos que desenvolver alguma forma de ajuste para não comprometer o resultado dos testes.

Entretanto, conforme fica demonstrado nos gráficos 5, 6 e 7, o prazo para o vencimento das opções não influi no erro médio entre o preço dado pelos modelos e os preços de mercado. O gráfico 5 mostra que, para as opções In the money, o erro médio (considerando-se a volatilidade histórica de 60 dias) situa-se próximo de - 40%. Para as opções At the money e Out of the Money, os gráficos 6 e 7 mostram que este erro gira em torno de - 60% e - 80%, respectivamente.

Um ponto curioso é que o erro médio para as opções estimadas com volatilidade implícita são positivos para as opções In the Money e At the Money, mas torna-se negativo para as opções Out of the Money.

METODOLOGIA DOS TESTES

Para testar a aderência dos preços obtidos pelos dois modelos aos preços praticados efetivamente no mercado, utilizaremos o teste estatístico T. Tal teste será feito da seguinte forma:

Primeiro, estimaremos a seguinte equação:

$C_i = \alpha_0 + \alpha_1 C(M)_i + \varepsilon_i$

Onde: C_i é o preço de mercado para determinada opção no instante i

$C(M)_i$ é o preço estimado pelo modelo a ser testado para a mesma opção no mesmo instante i

ε_i é o erro da regressão

Para testar a eficiência do modelo binomial, realizaremos dois testes T. O primeiro testará a hipótese de que $\alpha_0 = 0$ e o segundo testará a hipótese de que $\alpha_1 = 1$. Aceitar as duas hipóteses nulas significa dizer que os preços dados pelo modelo binomial estão em aderência com os preços praticados no mercado, ou seja, o modelo dá preços realistas para opções, se duvidarmos da capacidade deste de gerar resultados eficientes, ou o mercado pratica preços razoáveis, se estivermos certos da capacidade de precificação do modelo e céticos quanto a racionalidade do mercado. Violar alguma das hipóteses nulas significa dizer que os preços dados pelo modelo binomial não estão em aderência perfeita com os preços praticados no mercado.

TESTES EMPÍRICOS

Seguindo os procedimentos numéricos descritos na seção anterior, foram estimadas as equações. Para tais estimações, a base de dados foi trabalhada da seguinte forma: primeiro, foi feita uma divisão por classe de *Moneyness*. Assim, foram criados três *clusters*, In the Money, At the Money e Out of the Money, respectivamente. Feito isso, para cada classe de *Moneyness* a base de dados foi dividida em semestres, dado que a eficiência do modelo pode ser comprometida por períodos de volatilidades exacerbadas no preço do ativo objeto, tipicamente causadas por crises, sejam elas domésticas ou externas. O Brasil particularmente, no período das amostras, foi atingido por duas grandes crises: a crise de oferta do setor energético, no primeiro semestre de 2001 e a crise de confiança gerada pelas eleições presidenciais, ao longo do final do primeiro semestre e o segundo semestre de 2002.

Outro ponto que vale a pena ser mencionado a respeito das equações é que elas foram estimadas a partir de dados seccionais, para evitar problemas de autocorrelação entre as observações. Assim, supusemos que cada observação é independente da outra no tempo. O ponto que para nós é relevante é saber se, para cada dia de negociação, o modelo a ser testado gera resultados aderentes aos preços praticados no mercado. Portanto, o fator tempo não foi levado em consideração nas estimações.

A liquidez das opções também não foi levada em consideração, pois, segundo nos mostra o gráfico 8 a quantidade não faz com que o erro médio entre o preço dado pelo modelo binomial (estimado a partir da volatilidade implícita dada pelo modelo de Black & Scholes) e o preço de mercado das opções caia significativamente. Em algumas ocasiões, conforme demonstra o gráfico, este erro médio inclusive aumenta quando se passa de uma faixa menor para uma maior de quantidade.

Em relação à variância do preço do ativo objeto, as ações da Telemar, foram utilizados dois procedimentos. Para a determinação dos parâmetros u e d, utilizamos tanto a volatilidade implícita dada pelo modelo de Black & Scholes, como a volatilidade histórica do ativo. Neste caso, o período escolhido foi de sessenta dias, por não ser nem muito longo nem demasiadamente curto.

Para efeitos comparativos, também estimamos a equação acima especificada para o modelo de Black & Scholes, empregando a mesma volatilidade de 60 dias.

O resultado das estimações é apresentado nas tabelas um, dois e três, representando respectivamente as classes In the Money, At the Money e Out of the money.

O primeiro ponto a se notar nos resultados é que as equações estimadas com a volatilidade histórica de sessenta dias, tanto para o modelo binomial quanto para o modelo de Black & Scholes, independente da classe de *Moneyness*, apresentam parâmetros extremamente semelhantes. Tal resultado, pelo menos para as classes In the money e At the money, era de se esperar, dada a convergência de preços dos dois modelos em função da *Moneyness* das opções, conforme a discussão do capítulo 5. Este resultado, entretanto, foi uma surpresa para as opções Out of the money, por este mesmo motivo.

A análise dos testes T para o parâmetro α_0, tanto para o modelo de Black & Scholes quanto para o modelo binomial, empregando-se a volatilidade de 60 dias, mostrou que ambos os modelos apresentam um viés sistemático de subprecificação das opções em relação aos preços praticados pelo mercado. Em todos os semestres, para todas as classes de *Moneyness*, a hipótese nula de que $\alpha_0 = 0$ foi rejeitada, indicando que existe um intercepto nas equações estimadas. Em todas elas, este intercepto foi positivo. Uma das razões para o aparecimento deste intercepto positivo podem ser os custos de transação inerentes às operações com opções, tais como taxas de corretagem e emolumentos. Assim, os agentes incluiriam tais custos nos preços dados pelo modelo. No entanto, provar esta hipótese foge ao escopo deste trabalho.

Uma outra razão para este problema pode ser a não adequação do período de sessenta dias para a estimação da volatilidade. De fato, se compararmos a volatilidade implícita média dada pelo modelo de Black & Scholes para cada dia de negociação com a volatilidade de sessenta dias do ativo objeto, veremos que estas são muito diferentes, conforme demonstrado no gráfico 9. No entanto, esta hipótese parece ser refutada pelo simples fato da volatilidade implícita apresentar picos e variância que nenhum período histórico da série de preços do ativo objeto demonstra seguir.

Em relação à análise dos resultados dos testes T nas equações do modelo binomial utilizando-se a volatilidade implícita dada pela equação de Black & Scholes, a significância do intercepto não apresenta um único padrão de comportamento. Para as opções In the money verifica-se que a hipótese nula de que $\alpha_0 = 0$ é aceita em todos os semestres estudados, para um nível de significância de 5%. No entanto, estes resultados não se repetem para as outras classes de *Moneyness*. Adotando o mesmo nível de significância citado acima, rejeitamos a hipótese nula para os semestres 2000.2 e 2001.1 para as opções At the money e só aceitamos a hipótese nula para o semestre 2000.1 para as opções Out of the Money.

Esperávamos que os resultados destes testes confirmassem a não existência dos interceptos, para qualquer classe de *Moneyness*, dado que a volatilidade implícita é a volatilidade que faz com que os preços de mercado das opções o os preços dados pelo modelo de Black & Scholes sejam iguais. De fato, foi isso que ocorreu para as opções In the Money. Entretanto, com já foi dito, tal comportamento não foi sempre verificado para as opções At the Money e foi uma exceção para as opções Out of the Money.

Até agora, discorremos apenas sobre os resultados dos testes para o parâmetro α_0. Iremos agora discutir os resultados dos testes sobre o parâmetro α_1. É importante lembrar que, para estes testes, as tabelas I, II e III mostram os resultados dos testes T para a hipótese nula de que $\alpha_1 = 1$.

O ponto que chamou-nos mais atenção nestes resultados foi que, para as equações Out of the Money, em todos os casos, utilizando um nível de significância de 5%, rejeitamos a hipótese nula de que $\alpha_1 = 1$. Surpreendentemente, este resultado foi verificado até mesmo para o modelo binomial com volatilidade implícita de Black & Scholes.

Em relação aos testes conduzidos sobre o modelo binomial com volatilidade implícita de Black & Scholes para as outras duas classes de *Moneyness*, em que esperávamos que a hipótese nula fosse aceita para todos os semestres, este resultado também não foi verificado. Em ambos os casos, dois semestres violaram a hipótese nula. Foram eles: 2001.2 e 2003.1 para as opções In the Money e 2000.2 e 2001.1 para as opções At the Money.

Já para os modelos estimados com volatilidade histórica de sessenta dias para as classes In the Money e At the Money, os seguintes resultados são apresentados: para as opções At the Money aceita-se a hipótese nula nos semestres de 2000.1, 2000.2, 2002.1 e 2002.2, tanto para o modelo binomial quanto para o modelo de Black & Scholes; para as opções In the Money aceita-se a hipótese nula apenas nos semestres de 2000.2 (modelos binomial e de Black & Scholes) e 2001.1 (somente para o modelo de binomial). Tais resultados foram de certa forma surpreendentes e geram evidencias a três possíveis questionamentos: a) o mercado pode estar usando, além destes, outros modelos de precificação de opções; b) o mercado está atribuindo ao modelo níveis de volatilidade do ativo objeto diferentes do comportamento histórico deste, hipótese que nos pareceu irrealista, conforme discutido acima; c) o mercado é ineficiente na precificação de opções. No entanto, deixamos estes questionamentos em aberto para futuros trabalhos.

A analise do R^2 das equações também é interessante. Este é o coeficiente que mede o poder explicativo das equações. Ele situa-se no intervalo entre zero e um e quanto mais próximo do limite superior, maior é o grau de explicação da equação, ou seja, ela consegue "explicar" mais a realidade. Esperávamos que este coeficiente de todas as equações fosse bastante alto, flutuando em torno de 0,90. No entanto, exceto para as equações estimadas pelo modelo binomial com a volatilidade implícita dada pela equação de Black & Scholes, não foi isso que aconteceu. Nos modelos estimados com a volatilidade histórica de sessenta dias, as equações estimadas para as opções In the money até que seguiram este padrão. Entretanto, para as outras duas classes de *Moneyness* este comportamento não foi verificado, independente do modelo testado ou do semestre escolhido. A razão deste ocorrido foi uma grande dispersão entre os preços praticados pelo mercado e os preços dados pelos modelos. Isto pode ser visto nos gráficos 6, 7 e 8, que mostram exatamente esta dispersão, para o modelo binomial com volatilidade de sessenta dias. Os dados referem-se ao primeiro semestre do ano de 2001. Curiosamente, este semestre apresentou o menor R^2 dentre todas as equações estimadas, independente do modelo testado ou da volatilidade utilizada. Como foi dito anteriormente, este foi o semestre da crise de energia brasileira. Nos gráficos, a linha vermelha mostra a equação estimada. Para que o R^2 das equações fosse igual a 1, todos os pontos deveriam estar situados em cima desta linha. Para efeitos ilustrativos, também inserimos nos gráficos a linha preta, que representa uma equação sem intercepto e com um coeficiente angular igual a 1. Esta seria a equação estimada se os preços de mercado das opções fossem exatamente iguais aos preços dados pelo modelo.

7) Conclusão

O presente trabalho teve o objetivo de testar a aderência dos preços das opções de Telemar obtidos pelo modelo binomial com os preços praticados pelo mercado. Além disso, também quisemos comparar os resultados obtidos pelo modelo binomial com o modelo de Black & Scholes, tanto para os dados empíricos quanto para dados hipotéticos. Para isso, começamos descrevendo todos os aspectos inerentes a construção teórica dos modelos, ou seja, tanto as hipóteses assumidas quanto os mecanismos operacionais, de modo a evitar questionamentos acerca da realidade de seus pressupostos.

Posteriormente, identificamos como é o contrato de *calls* negociado na Bolsa de valores de São Paulo. Identificamos seus aspectos básicos, assim como todas as ocasiões em que o preço de exercício é ajustado. Também demonstramos, embora superficialmente, como funciona o sistema de venda a descoberto, através do ajuste diário de margens. O objetivo deste capítulo foi mostrar como é feita a negociação de opções na prática.

Feito isso, partimos para uma comparação entre os resultados obtidos pelo modelo binomial e pelo modelo de Black & Scholes. Mostramos que, quanto mais passos seguidos pelo modelo binomial e quanto maior a *Moneyness* das *opções*, maior é a aderência dos preços obtidos pelos dois modelos.

O resultado desta comparação se refletiu nos testes empíricos desenvolvidos no capítulo 6, objetivo principal deste trabalho, que, conforme foi dito, era testar a aderência dos preços das opções obtidos pelo modelo binomial aos preços praticados no mercado. Isso ficou provado quando comparamos os parâmetros das regressões estimadas para o modelo binomial e para o modelo de Black & Scholes, que foram muito parecidos, em linha com os resultados do capítulo 5.

Quanto aos outros resultados dos testes efetuados no capítulo 6, ficou demonstrado, através da comparação dos resultados do modelo binomial com a volatilidade histórica e com a volatilidade implícita, que este fator é determinante na aderência do modelo. Enquanto os resultados do modelo binomial com a volatilidade implícita apresentaram altíssimos R^2 e, pelo menos para as classes In e At the Money, aceitação de que os parâmetros estimados são zero e um, respectivamente, para a maioria dos semestres estudados, este comportamento não foi verificado com tamanha freqüência para as estimativas com volatilidade de sessenta dias. Quanto as opções Out of the Money, só em um semestre do modelo estimado com a volatilidade implícita, um parâmetro, α_0 foi aceito como sendo zero. Para o modelo estimado com a volatilidade histórica rejeitamos a hipótese nula para qualquer um dos parâmetros em cada semestre.

Em relação aos modelos estimados pela volatilidade histórica, tanto para o modelo binomial quanto para Black & Scholes, mostramos que as regressões estimadas sempre apresentam um intercepto positivo, podendo indicar a presença de custos de transação, ignorados pelos modelos de precificação.

Ainda sobre as regressões estimados com volatilidade histórica, não conseguimos identificar um padrão único a respeito da inclinação das retas. Tal resultado indica que, além do intercepto demonstrado pelos testes T nos parâmetros α_0, há algum ou alguns outros fatores que interferem na precificação das opções. No entanto, conforme foi demonstrado, estes não são a quantidade nem o prazo para o vencimento das opções.

Embora não fosse nosso objetivo principal, também explicamos alguns conceitos inerentes ao mercado de opções, como *Moneyness,* volatilidade implícita e o problema do sorriso da volatilidade. Além disso, demonstramos rapidamente que a volatilidade implícita nem sempre está em linha com a volatilidade histórica e que este é um ponto fundamental para a precificação de opções.

Portanto, podemos tirar duas conclusões: o modelo binomial pode ser eficiente para a precificação de opções se a volatilidade correta for utilizada, restrição condicional também para o modelo de Black e Scholes; os dois modelos são equivalentes. Conforme foi dito por Hull em uma entrevista (Nunes, 1997): "É um erro considerar que as árvores binomiais sejam fundamentalmente diferentes do modelo de Black e Scholes... A árvore binomial nada mais é do que uma representação discreta do modelo que supõe comportamento lognormal do preço do ativo à vista. As árvores binomiais tendem a convergir para o modelo de Black e Scholes".

Como sugestão adicional ao trabalho, sugerimos repetir o estudo utilizando-se uma base de dados que inclua todas as opções negociadas na Bovespa, principalmente as opções sobre Petrobrás e sobre o índice Ibovespa. Também sugerimos um estudo que investigue qual é a volatilidade histórica que melhor se adapte a volatilidade implícita e se podemos observar um padrão de comportamento recorrente nesta relação.

8) Bibliografia

Black, F. & Scholes, M.; The Pricing of options and Corporate Liabilities; Journal of Political Economy 81, pág 637-659, Maio-Junho de 1973.

Boyle, P. P.; A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables; Journal of Financial and Quantitative Analysis 23, pág. 1-12, Março de 1988.

Cox, J., Ross, S. & Rubistein; Option Pricing: A Simplified Approach; Journal of Financial Economics 7, pág. 229-264, Outubro de1979.

Donangelo, A.;Lemgruber, E.; Silva, W.; Estimadores de volatilidade para modelos de valor em risco de ativos lineares e não lineares; Investigação para períodos de crise e estáveis no mercado brasileiro; Gestão de risco e derivativos – aplicação no Brasil. Editora Atlas, 2001.

Elton, Edwin J. & Gruber, Martin J.; Modern Portfolio Theory and Investment Analysis; Wiley, USA, 1991.

Gujarati, Damodar N.; Basic Econometrics; McGraw Hill, N.Y., USA, 1988.

Hull, John C.; Opções, Futuros e outros Derivativos; BM&F, 3ª Edição, 2001.

Figueiredo, Antônio Carlos; Lemgruber, Facó; Araújo, Gustavo Silva; Barbedo, Cláudio Henrique da Silveira; Contornando os Pressupostos de Black & Scholes: Aplicação do Modelo de Precificação de Opções de Duan no Mercado Brasileiro; Working Paper 78, Banco Central do Brasil, Outubro de 2003.

Figueiredo, Marcel Scharth; Monografia de Final de Curso, PUC-RIO, 2003.

Nunes, Allesandro da Costa; Monografia de Final de Curso, PUC-RIO, 1997.

Rubinstein, Mark; Implied Binomial Trees; Journal of Finance N.:° 3, págs. 770-817, Julho de 1994

9) Gráficos e Tabelas

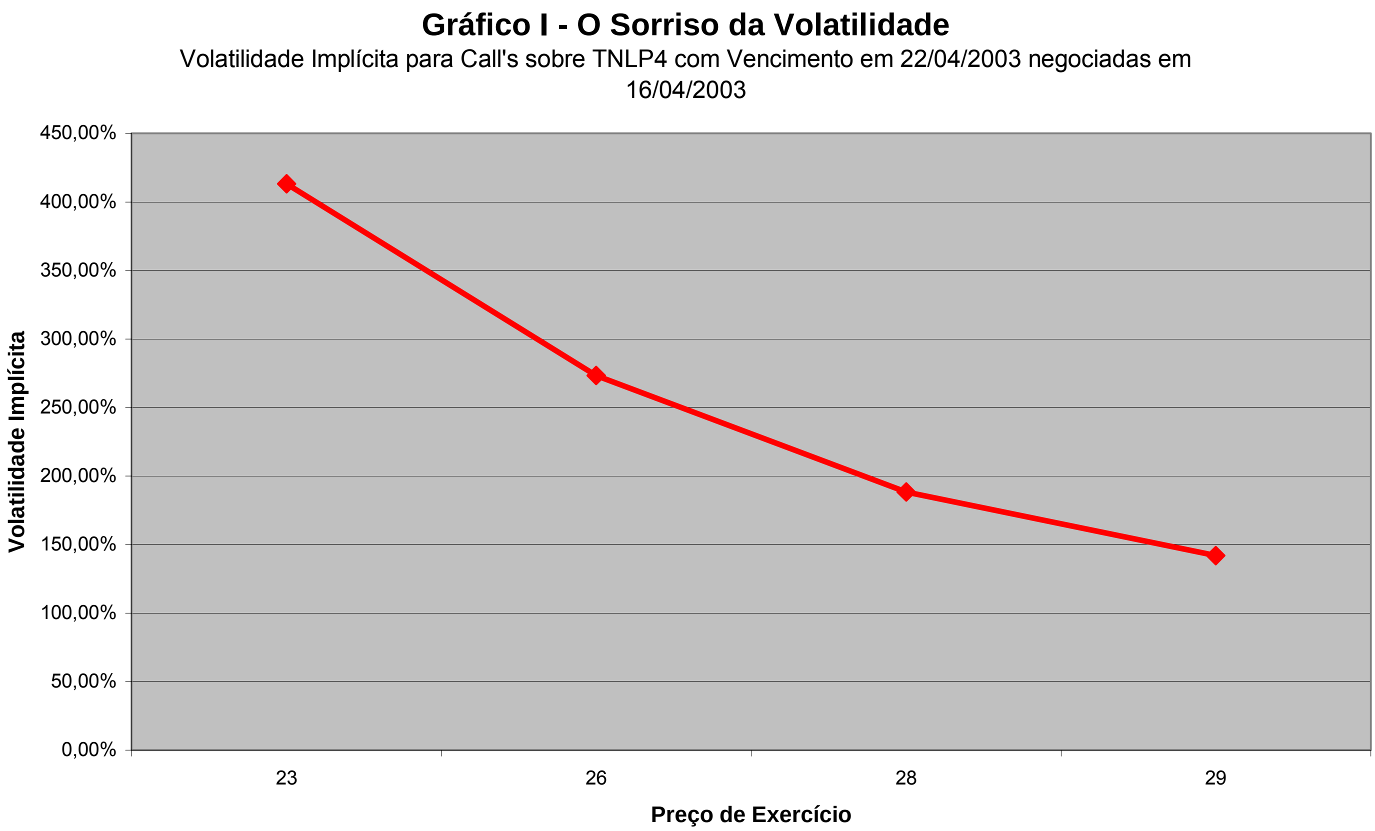


Gráfico 2

Diferença Percentual entre os modelos Binomial e Black & Scholes em função do número de passos do modelo binomial - Curvas de nível para opções In the Money

Preço de exercício: R$ 100 ; Tx. Juros: 15% ; Volatilidade: 40% ; Vencimento: 30 dias

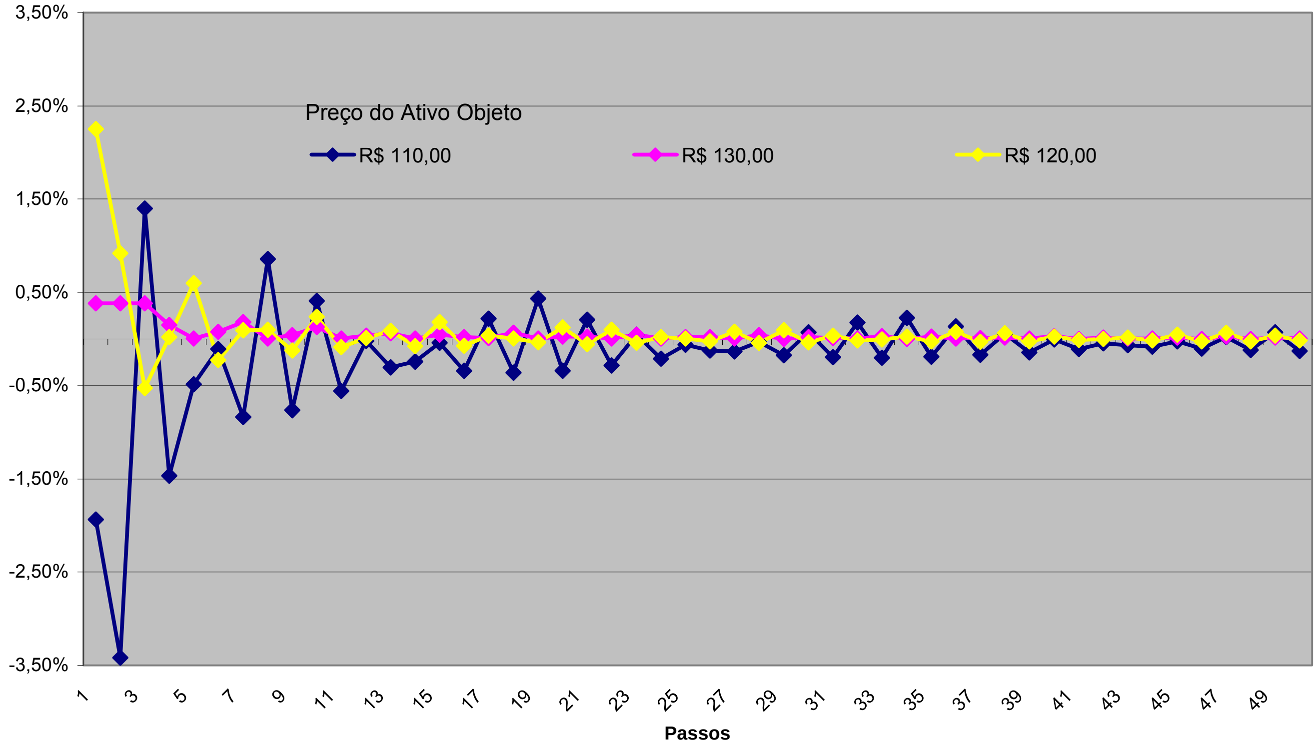


Gráfico 3

Diferença Percentual entre os modelos Binomial e Black & Scholes em função do número de passos do modelo Binomial - Curvas de nível para opções At the Money

Preço de exercício: R$ 100 ; Tx. Juros: 15% ; Volatilidade: 40% ; Vencimento: 30 dias

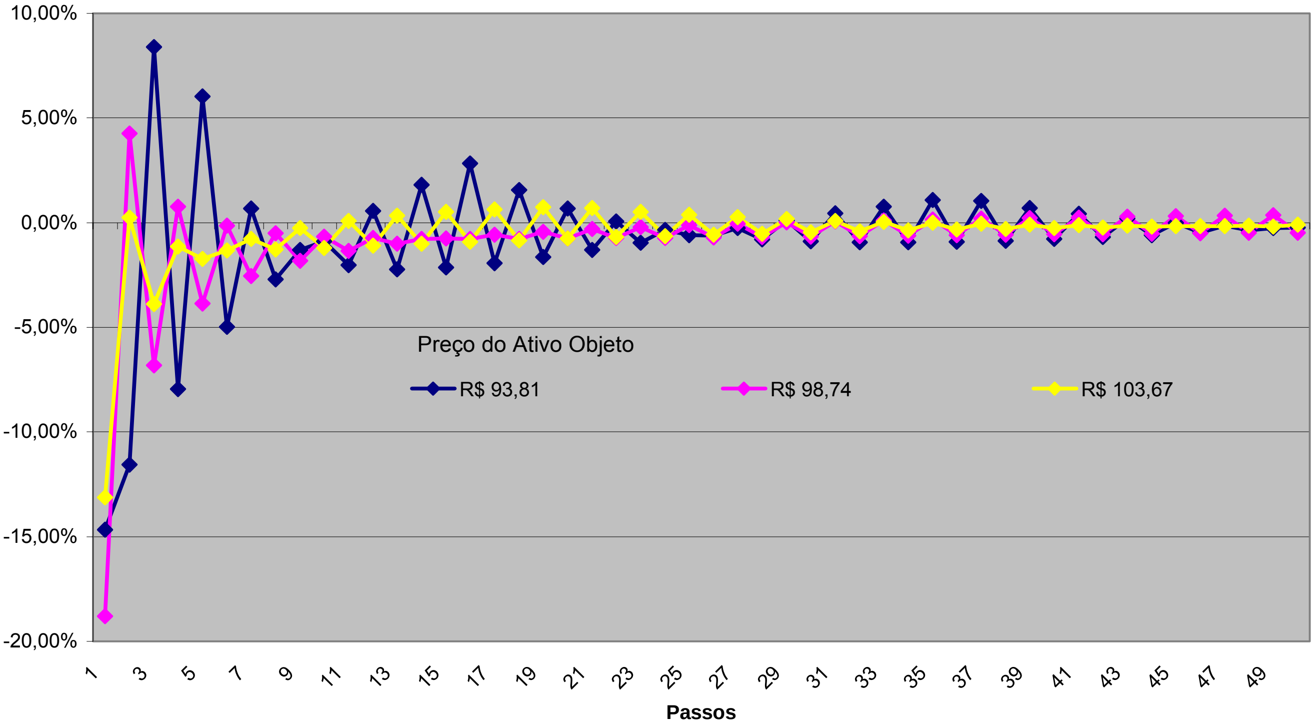
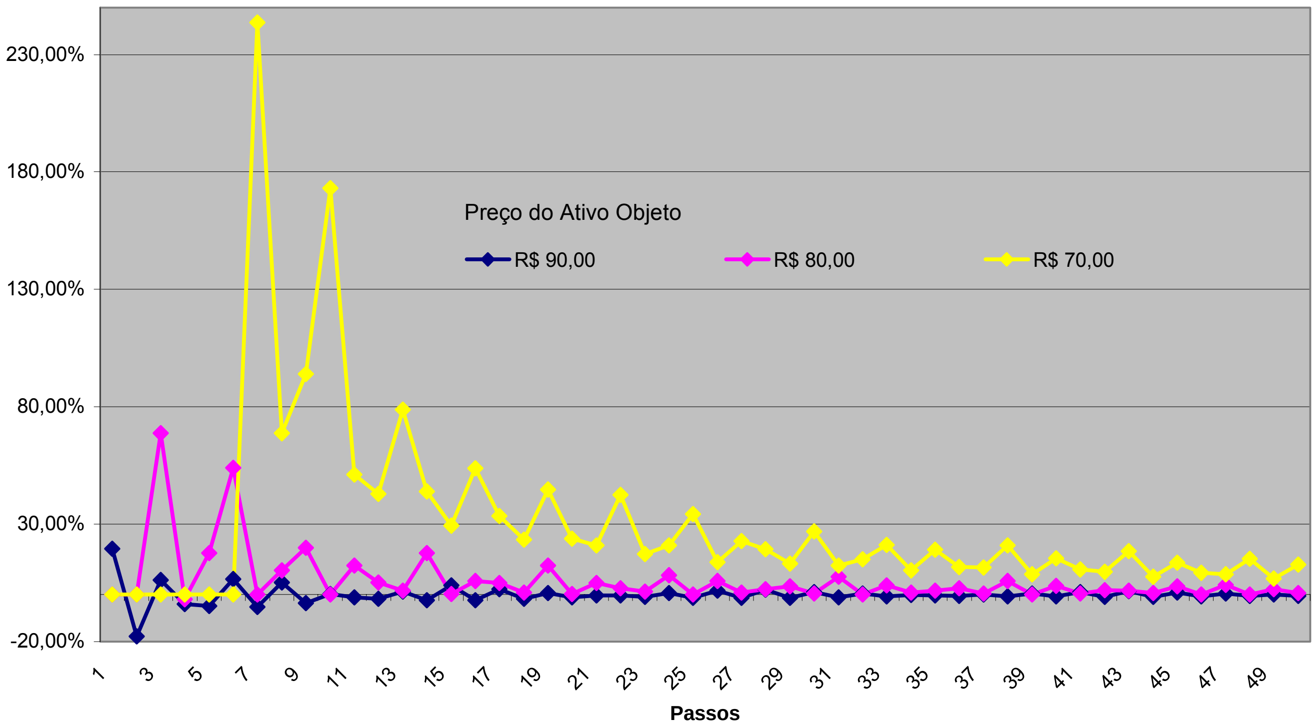


Gráfico 4

Diferença Percentual entre os modelos Binomial e Black & Scholes em função do número de passos do modelo Binomial - Curvas de nível para opções Out of the Money

Preço de exercício: R$ 100 ; Tx. Juros: 15% ; Volatilidade: 40% ; Vencimento:30 dias



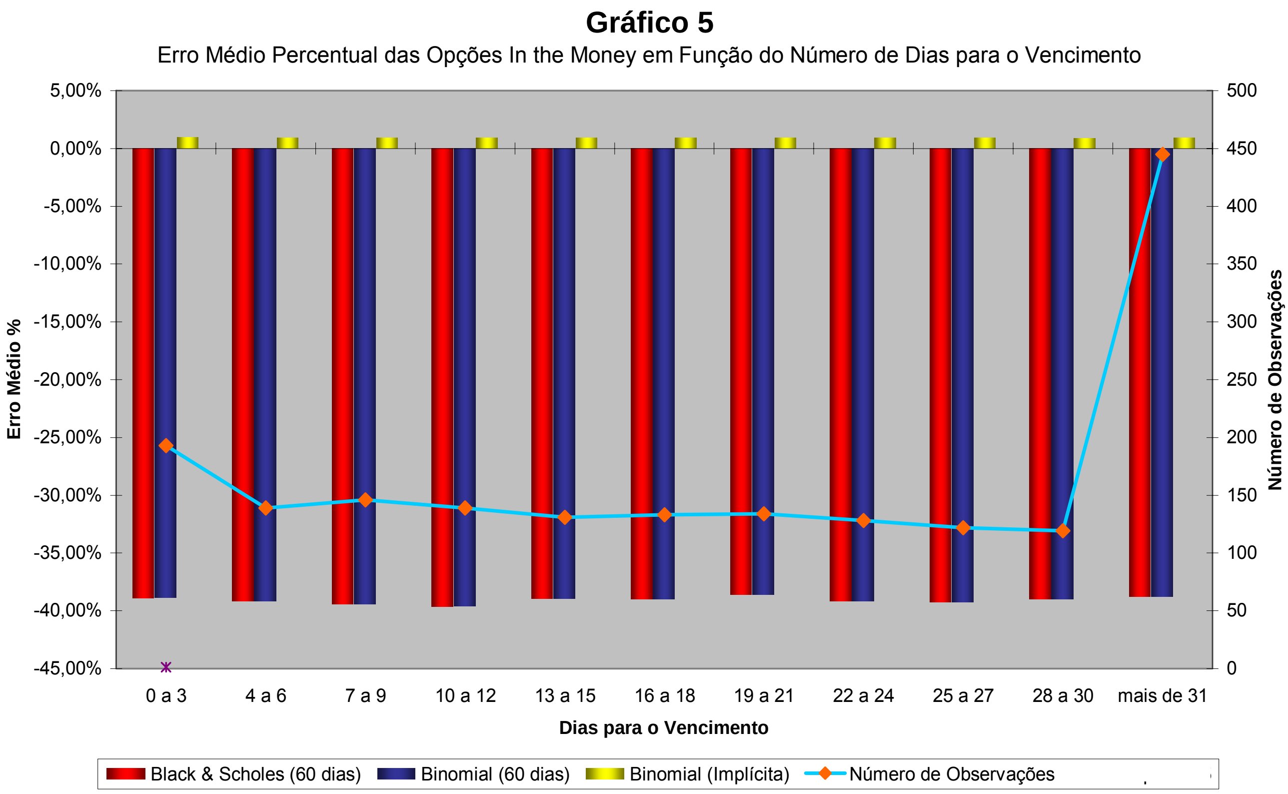


Gráfico 5
Erro Médio Percentual das Opções In the Money em Função do Número de Dias para o Vencimento
Erro Médio %
Número de Observações
5,00%
0,00%
-5,00%
-10,00%
-15,00%
-20,00%
-25,00%
-30,00%
-35,00%
-40,00%
-45,00%
500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
0 a 3
4 a 6
7 a 9
10 a 12
13 a 15
16 a 18
19 a 21
22 a 24
25 a 27
28 a 30
mais de 31
Dias para o Vencimento
Black & Scholes (60 dias)
Binomial (60 dias)
Binomial (Implícita)
Número de Observações

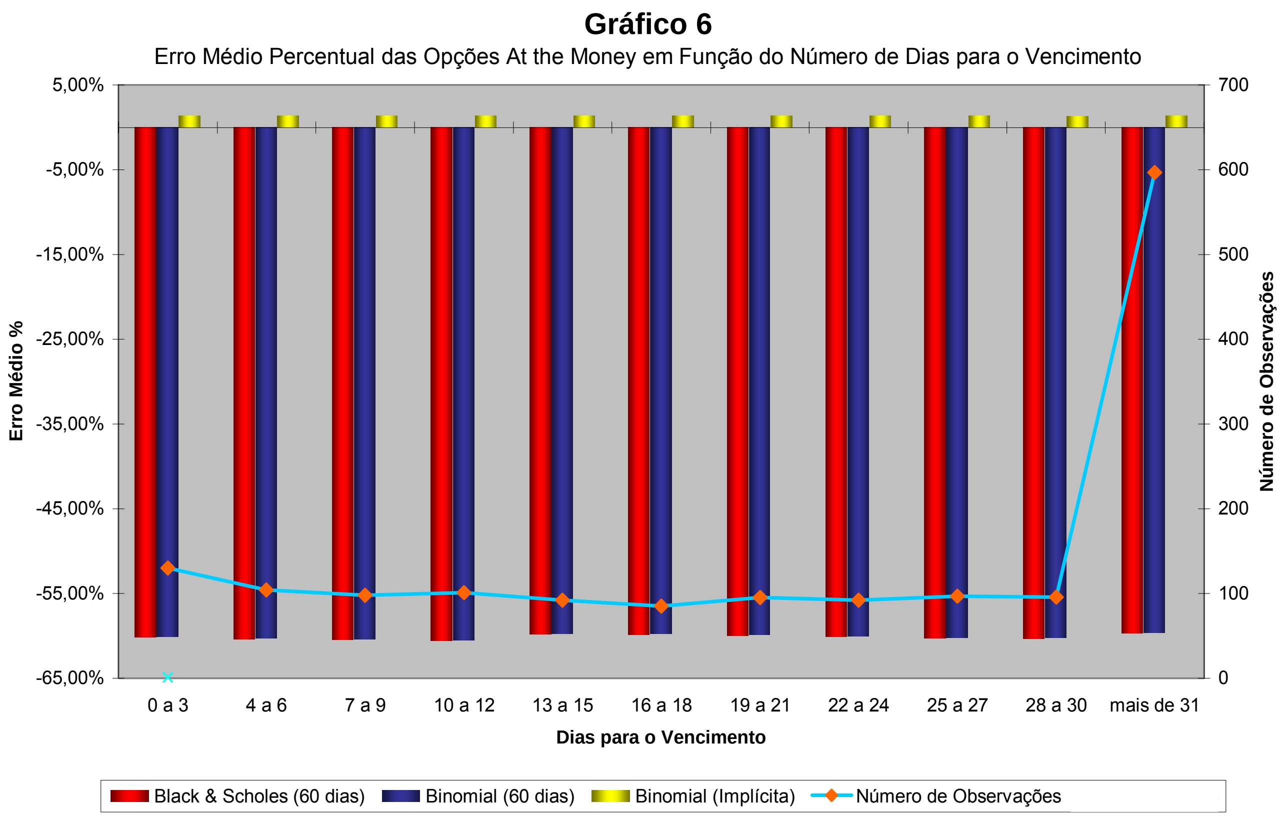


Gráfico 6
Erro Médio Percentual das Opções At the Money em Função do Número de Dias para o Vencimento
Erro Médio %
5,00%
-5,00%
-15,00%
-25,00%
-35,00%
-45,00%
-55,00%
-65,00%
Número de Observações
700
600
500
400
300
200
100
0
0 a 3
4 a 6
7 a 9
10 a 12
13 a 15
16 a 18
19 a 21
22 a 24
25 a 27
28 a 30
mais de 31
Dias para o Vencimento
Black & Scholes (60 dias)
Binomial (60 dias)
Binomial (Implícita)
Número de Observações

Gráfico 7

Erro Médio Percentual das Opções Out of the Money em Função do Número de Dias para o Vencimento

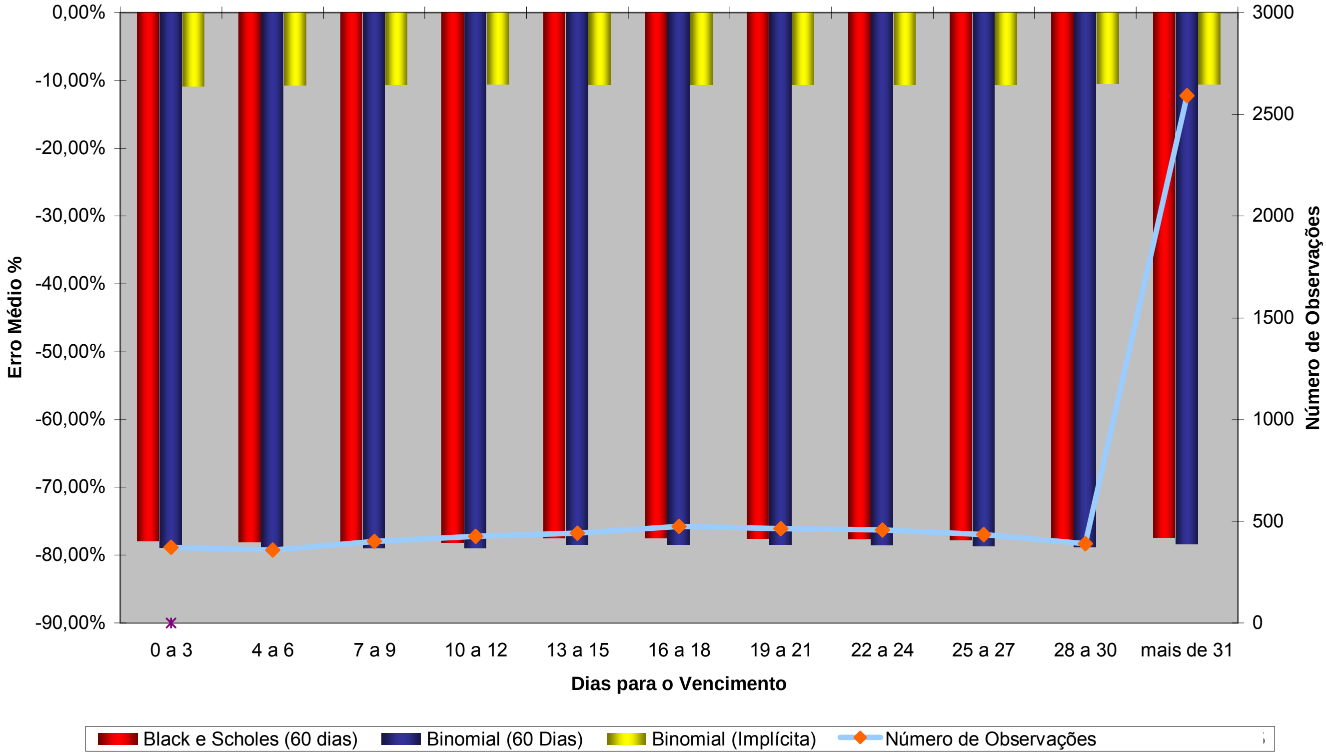


Gráfico 8

Erro médio dos preços do modelo binomial em relação aos preços praticados no mercado em função da quantidade

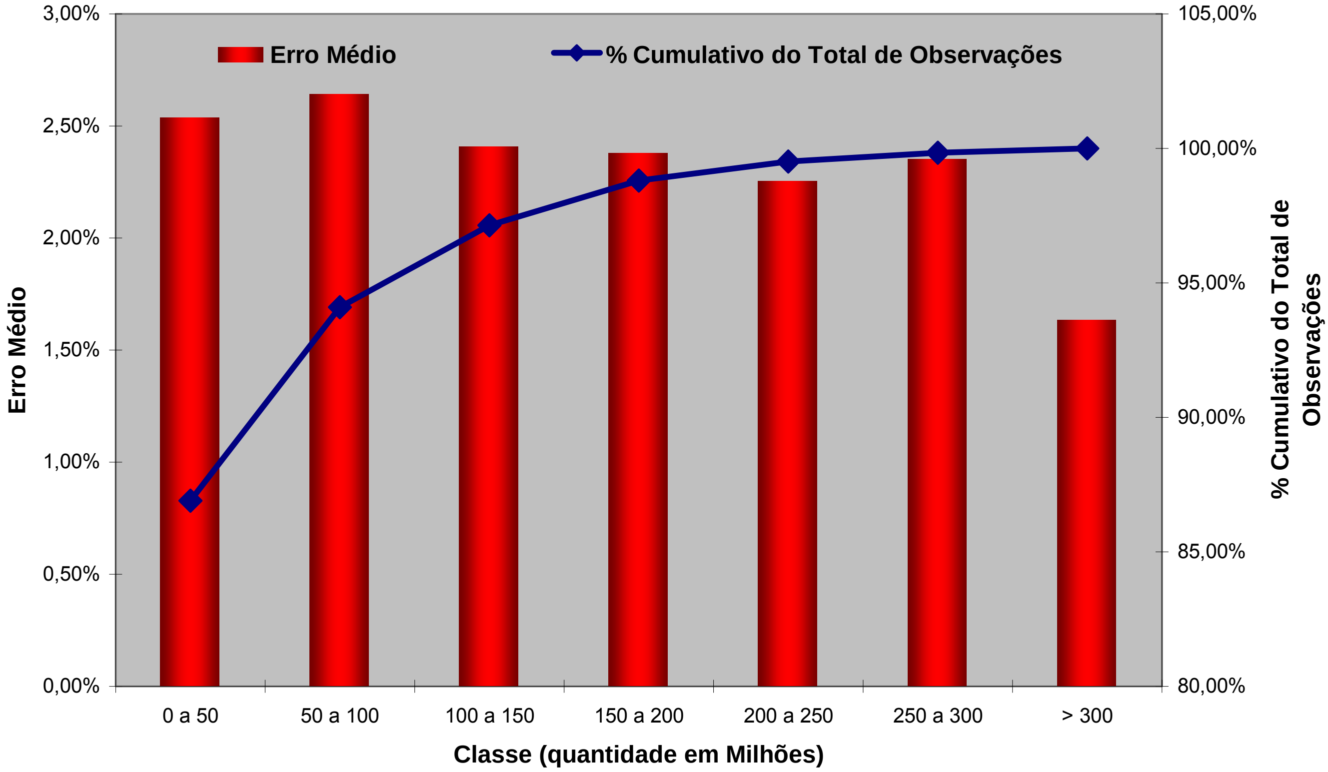


Gráfico 9

Dispersão entre os preços praticados pelo mercado e os preços dados pelo modelo binomial (volatilidade histórica de 60 dias) para o primeiro semestre do ano de 2001 - Opções In the money

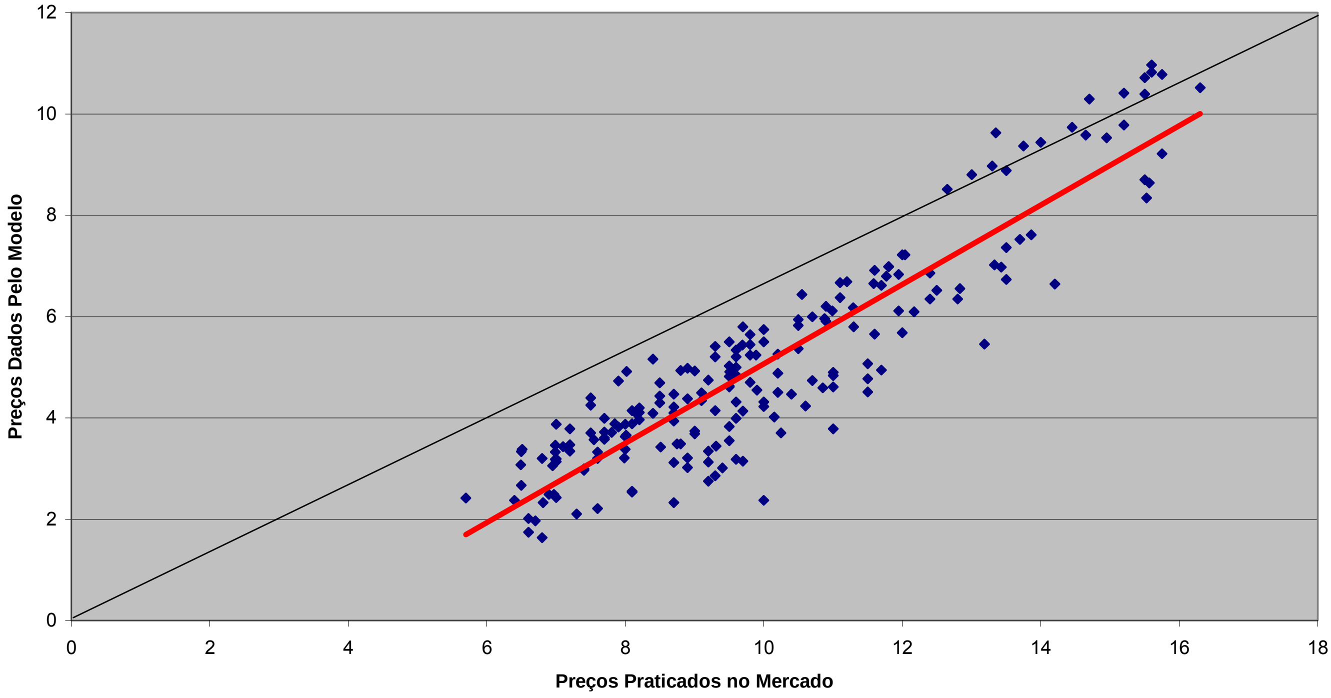


Gráfico 10

Dispersão entre os preços praticados pelo mercado e os preços dados pelo modelo binomial (volatilidade histórica de 60 dias) para o primeiro semestre do ano de 2001 - Opções At the money

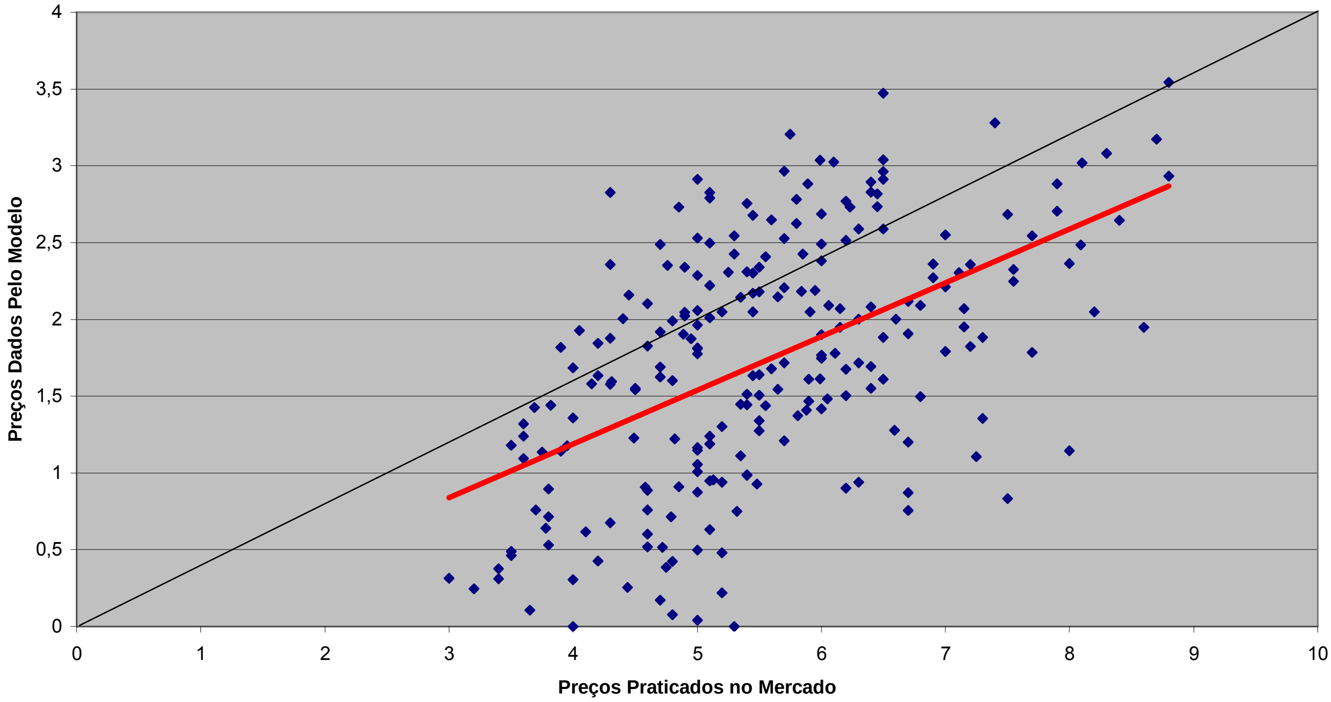


Gráfico 11

Dispersão entre os preços praticados pelo mercado e os preços dados pelo modelo binomial (volatilidade histórica de 60 dias) para o primeiro semestre do ano de 2001 - Opções Out of the money

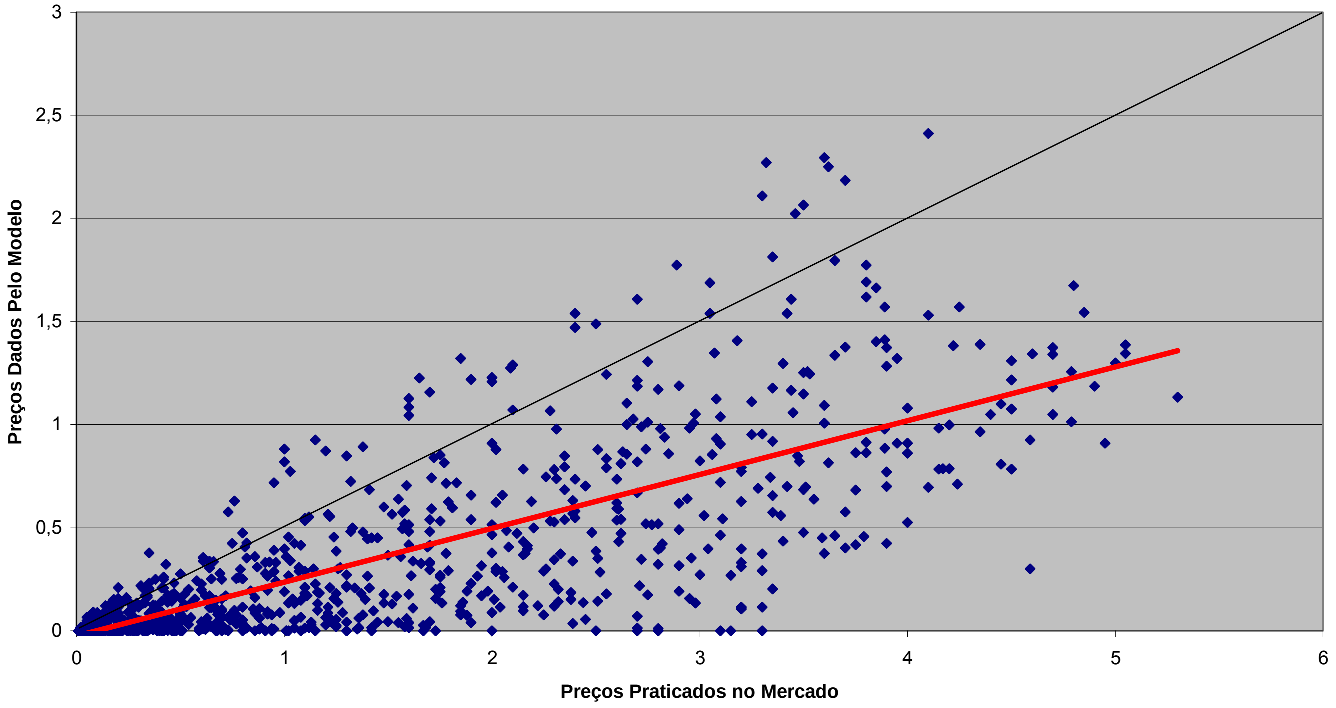


Gráfico 12

Volatilidade de sessenta dias das ações da Telemar e média da volatilidade implícita fazendo-se uso da equação de Black & Scholes

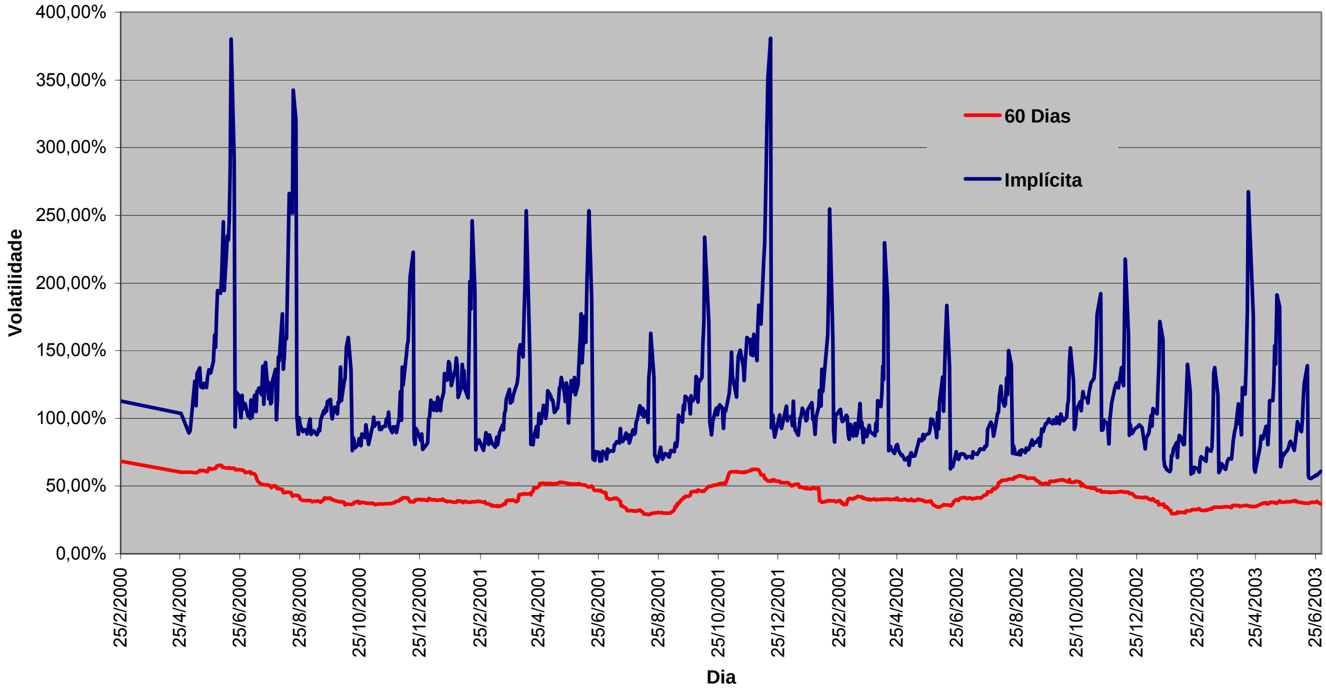


Tabela I

Resultado das regressões para as opções In the money

Modelo	Semestre	α0	t(α0)	p-valor	α1	t(α1)	p-valor	R²	n
Black & Scholes com Volatilidade de 60 dias	2000.1	4,2642	22,7637	0,0000	1,0884	2,5279	0,0142	0,9435	60
	2000.2	5,1189	19,5242	0,0000	1,0762	1,8632	0,0678	0,9264	57
	2001.1	4,5994	25,1354	0,0000	1,0659	1,9758	0,0496	0,8356	203
	2001.2	2,6580	36,9898	0,0000	1,1342	11,1822	0,0000	0,9665	312
	2002.1	2,5003	24,8586	0,0000	1,2272	9,3342	0,0000	0,9118	248
	2002.2	1,8996	33,8127	0,0000	1,0954	5,9232	0,0000	0,9344	327
	2003.1	1,2028	38,7461	0,0000	1,0539	8,3947	0,0000	0,9775	621
Binomial com Volatilidade de 60 dias	2000.1	4,2617	22,6699	0,0000	1,0885	2,5217	0,0144	0,9432	60
	2000.2	5,1234	19,4313	0,0000	1,0756	1,8372	0,0716	0,9256	57
	2001.1	4,6024	25,1226	0,0000	1,0656	1,9632	0,0510	0,8351	203
	2001.2	2,6558	36,8602	0,0000	1,1344	11,1743	0,0000	0,9663	312
	2002.1	2,4946	24,7813	0,0000	1,2282	9,3704	0,0000	0,9118	248
	2002.2	1,8962	33,6224	0,0000	1,0960	5,9442	0,0000	0,9340	327
	2003.1	1,2022	38,6631	0,0000	1,0540	8,3991	0,0000	0,9775	621
Binomial com Volatilidade Implícita de Black & Scholes	2000.1	-0,1373	-0,6478	0,5197	0,9958	0,1989	0,8430	0,9748	60
	2000.2	-0,0118	-0,0664	0,9473	0,9916	0,5602	0,5776	0,9876	57
	2001.1	-0,0967	-1,2196	0,2240	1,0012	0,1590	0,8738	0,9884	203
	2001.2	0,0056	0,1583	0,8744	0,9915	2,2317	0,0263	0,9955	312
	2002.1	-0,0301	-0,6111	0,5417	0,9962	0,5760	0,5651	0,9896	248
	2002.2	0,0097	0,2961	0,7673	0,9902	1,7055	0,0891	0,9891	327
	2003.1	-0,0069	-0,4486	0,6539	0,9942	2,3810	0,0176	0,9962	621

Tabela II

Resultado das regressões para as opções At the money

Modelo	Semestre	α0	t(α0)	p-valor	α1	t(α1)	p-valor	R^2	n
Black & Scholes com Volatilidade de 60 dias	2000.1	3,7907	18,3804	0,0000	0,8726	1,4579	0,1498	0,6129	65
	2000.2	4,6176	31,2918	0,0000	0,9067	1,2983	0,1961	0,5034	159
	2001.1	4,1725	26,0006	0,0000	0,7988	2,3855	0,0179	0,2797	233
	2001.2	2,8326	35,5192	0,0000	0,7648	5,5704	0,0000	0,5996	221
	2002.1	2,3813	26,2936	0,0000	1,0372	0,6420	0,5215	0,5709	243
	2002.2	1,6428	33,2204	0,0000	0,9554	1,2950	0,1965	0,7581	247
	2003.1	0,8576	26,9345	0,0000	1,0782	3,3029	0,0010	0,8327	419
Binomial com Volatilidade de 60 dias	2000.1	3,7562	18,3017	0,0000	0,8836	1,3440	0,1838	0,6230	65
	2000.2	4,6207	31,2565	0,0000	0,9032	1,3478	0,1797	0,5015	159
	2001.1	4,1726	25,9394	0,0000	0,7968	2,4084	0,0168	0,2786	233
	2001.2	2,8334	35,4304	0,0000	0,7626	5,6185	0,0000	0,5979	221
	2002.1	2,3747	26,1847	0,0000	1,0391	0,6751	0,5003	0,5721	243
	2002.2	1,6322	32,9653	0,0000	0,9601	1,1586	0,2477	0,7604	247
	2003.1	0,8538	26,9509	0,0000	1,0789	3,3594	0,0009	0,8349	419
Binomial com Volatilidade Implícita de Black & Scholes	2000.1	0,1237	0,5522	0,5827	0,9619	0,9965	0,3228	0,9094	65
	2000.2	0,5099	3,6322	0,0004	0,9042	4,4357	0,0000	0,9178	159
	2001.1	0,2103	2,5160	0,0125	0,9504	3,4177	0,0007	0,9488	233
	2001.2	0,0207	0,4090	0,6829	0,9849	1,2637	0,2077	0,9687	221
	2002.1	0,0441	0,9018	0,3680	0,9789	1,7246	0,0859	0,9638	243
	2002.2	-0,0294	-0,8445	0,3992	1,0003	0,0250	0,9801	0,9679	247
	2003.1	-0,0041	-0,3175	0,7510	0,9901	1,7573	0,0796	0,9868	419

Tabela III

Resultado das regressões para as opções Out of the money

Modelo	Semestre	α0	t(α0)	p-valor	α1	t(α1)	p-valor	R²	n
Black & Scholes com Volatilidade de 60 dias	2000.1	1,0661	12,1745	0,0000	1,4298	6,5092	0,0000	0,7293	176
	2000.2	0,8428	22,5813	0,0000	2,7365	25,6441	0,0000	0,6596	845
	2001.1	0,5059	17,1481	0,0000	2,3807	24,2266	0,0000	0,6195	1074
	2001.2	0,3300	17,4154	0,0000	1,7119	19,2446	0,0000	0,6648	1082
	2002.1	0,2048	16,9244	0,0000	2,3918	44,6913	0,0000	0,8423	1106
	2002.2	0,1161	17,7007	0,0000	1,9685	56,5739	0,0000	0,9025	1430
	2003.1	0,0956	18,3103	0,0000	1,5746	32,8414	0,0000	0,8827	1078
Binomial com Volatilidade de 60 dias	2000.1	1,0692	12,2904	0,0000	1,4256	6,5033	0,0000	0,7317	176
	2000.2	0,8530	22,8822	0,0000	2,7208	25,4708	0,0000	0,6580	845
	2001.1	0,5121	17,4008	0,0000	2,3756	24,1780	0,0000	0,6192	1074
	2001.2	0,3338	17,6236	0,0000	1,7064	19,1195	0,0000	0,6639	1082
	2002.1	0,2100	17,3732	0,0000	2,3844	44,5058	0,0000	0,8418	1106
	2002.2	0,1207	18,3522	0,0000	1,9607	55,9954	0,0000	0,9014	1430
	2003.1	0,1001	19,0948	0,0000	1,5726	32,4511	0,0000	0,8807	1078
Binomial com Volatilidade Implícita de Black & Scholes	2000.1	0,0169	1,3171	0,1895	0,9896	2,3697	0,0189	0,9966	176
	2000.2	0,0196	4,0356	0,0001	0,9826	8,2870	0,0000	0,9962	845
	2001.1	0,0115	4,0811	0,0000	0,9866	8,4269	0,0000	0,9972	1074
	2001.2	0,0056	4,6025	0,0000	0,9922	7,8048	0,0000	0,9989	1082
	2002.1	0,0066	5,4411	0,0000	0,9907	8,5889	0,0000	0,9987	1106
	2002.2	0,0049	10,3218	0,0000	0,9941	10,6550	0,0000	0,9996	1430
	2003.1	0,0069	16,8373	0,0000	0,9909	12,2015	0,0000	0,9994	1078

Tabela IV

Resultado dos testes T sobre os parâmetros ao nível de significância de 5%

Hipóteses nulas de que α0 é igual a zero e α1 é igual a um

		In the Money		At the Money		Out of the Money	
Modelo	Semestre	α0	α1	α0	α1	α0	α1
Black & Scholes com Volatilidade de 60 dias	2000.1	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Aceita	Rejeita	Rejeita
	2000.2	Rejeita	Aceita	Rejeita	Aceita	Rejeita	Rejeita
	2001.1	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita
	2001.2	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita
	2002.1	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Aceita	Rejeita	Rejeita
	2002.2	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Aceita	Rejeita	Rejeita
	2003.1	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita
Binomial com Volatilidade de 60 dias	2000.1	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Aceita	Rejeita	Rejeita
	2000.2	Rejeita	Aceita	Rejeita	Aceita	Rejeita	Rejeita
	2001.1	Rejeita	Aceita	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita
	2001.2	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita
	2002.1	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Aceita	Rejeita	Rejeita
	2002.2	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Aceita	Rejeita	Rejeita
	2003.1	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita
Binomial com Volatilidade Implícita de Black & Scholes	2000.1	Aceita	Aceita	Aceita	Aceita	Aceita	Rejeita
	2000.2	Aceita	Aceita	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita
	2001.1	Aceita	Aceita	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita
	2001.2	Aceita	Rejeita	Aceita	Aceita	Rejeita	Rejeita
	2002.1	Aceita	Aceita	Aceita	Aceita	Rejeita	Rejeita
	2002.2	Aceita	Aceita	Aceita	Aceita	Rejeita	Rejeita
	2003.1	Aceita	Rejeita	Aceita	Aceita	Rejeita	Rejeita