Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Departamento de Economia

Monografia de Final de Curso

AGENTES RACIONAIS E O TEOREMA DO JÚRI

Lucas de Moura Reis

N° de Matrícula: 0412738

Professor Orientador: Vinícius Carrasco

Professor Tutor: Márcio Garcia

"Declaro que o presente trabalho é de minha autoria e que não recorri para realizá-lo, a nenhuma forma de ajuda externa, exceto quando autorizado pelo professor tutor"

Junho de 2008

“As opiniões expressas neste trabalho são de responsabilidade única e exclusiva do autor”

Sumário:

Introdução

No “Teorema do Júri” de Condorcet, temos uma sociedade que precisa escolher, dentre duas alternativas mutualmente exclusivas, aquela que maximiza o seu bem-estar. Em princípio, toda regra de votação tem esse objetivo e são utilizadas em geral por serem formas de agregar informação privada. Todos os membros da sociedade tem, a pricípio, as mesmas preferências, porém cada um recebe um sinal diferente, cada um tem uma percepção diferente da realidade. O que Condorcet argumenta em seu trabalho é que a melhor maneira de maximizar o bem-estar desta sociedade é com a aplicação da regra de maioria para resolver esse jogo.

Quando cada agente revela suas preferências, votando informativamente, a agregação das mesmas é o mais proximo que se pode chegar das preferências de toda a sociedade. Cabe ressaltar que para obtenção desses resultados é fundamental a suposição quanto ao comportamento dos agentes, todos revelando suas preferências através do voto. Se pensarmos que um agente tem conhecimento que o seu voto pode afetar a utilidade dos outros agentes, revelar suas preferências pode não ser um Equlibrio de Nash. Na verdade, o que veremos mais adiante é que, um perfil de votos, ou o resultado de uma eleição, será um Equilibrio de Nash apenas se nenhum agente for capaz de reverter o resultado do jogo ao mudar o seu voto.

Em suma, o objetivo deste trabalho é estudar diferentes modelos de votação, tendo como base o Teorema do Júri, para avaliar a importância do comportamento dos agentes no resultado do jogo. Queremos buscar na literatura, desde Condorcet, a evolução de modelos de votação para avaliar a contribuição e relevância das diferentes suposições na realidade.

Assim, o capítulo 1, apresentará um estudo do Teorema do Júri quando os agentes votam informativamente. No capítulo 2, estudaremos modelos em que agentes que votam sofisticadamente e informativamente coexistem. Finalmente no capitulo 3, verificaremos a importância da liberdade de expressão para a escolha das alternativas ótimas e a maximização do bem-estar de uma sociedade.

Capítulo 1: Descrição formal do Teorema do Juri

Pode-se argumentar que o Teorema do Júri do Marquês de Condorcet (1785), é um dos argumentos mais fortes a favor da democracia. O que esse teorema nos mostra através de simples cálculos matemáticos é que, sob determinadas condições, a maioria de um grupo, com informação limitada sobre um par de alternativas, deverá escolher a melhor alternativa com maior probabilidade do que um único agente decidindo individualmente. O teorema nos proporciona a fundamentação matemática para a regra de maioria e nos ajuda a entender a força de um governo democratico.

Neste capítulo vamos dar uma descrição matemática do teorema, para, desta forma, poder comprovar a sua relevância. Tomando como base o trabalho de Austen-Smith e Banks[1], tentaremos mostrar todas as crenças prévias ao teorema em si, a fim de ressaltar quais são as restrições ao modelo e que tipo de implicação elas geram no resultado.

Modelo matemático:

Para Austen-Smith e Banks, uma questão do Teorema do Júri é que, na verdade, ele já começa da metade. Por essa razão, descreveremos um modelo de crenças prévias e eventos que nos permitem identificar comportamentos individuais ótimos.

Digamos que haja um par de alternativas $\{C, D\}$ e dois estados da natureza $\{A, B\}$; Existe um numero $N = \{1, ..., n\}$ de agentes; vamos supor que $N \geq 5$ e ímpar. Os individuos

[1] AUSTEN-SMITH, D. e J. BANKS (1996) Information Aggregation, Rationality, and the Condorcet Jury Theorem. American Political Science Review, 90-1, pp34-45.

têm preferências idênticas quanto às alternativas e aos estados da natureza, representadas por,

$$\text{para todo i pertencente a N, } Ui(C,A) = Ui(D,B) = 1 \text{ e}$$
$$Ui(D, A) = Ui(C, B) = 0, \qquad (1)$$

Pelas funções de utilidade, podemos ver que todos os agentes preferem a alternativa C quando o estado da natureza é A e preferem a alternativa D quando o estado de natureza é B. Nenhum dos agentes sabe qual é o real estado de natureza; seja p* pertencente a (0, 1) a probabilidade comum ex-ante de o estado de natureza ser A. Antes de qualquer decisão ser feito sobre {C, D}, o indivíduo i pertencente a N recebe um sinal privado, Si perntencente a {0, 1}, sobre o verdadeiro estado de natureza. Os sinais dos indivíduos são independentes e formados através de uma distribuição que depende do estado da natureza que satisfaz

$$Pr[Si = 0 \mid A] = qa \text{ pertencente a } (1/2, 1) \text{ e}$$
$$Pr[Si = 1 \mid B] = qb \text{ pertencente a } (1/2, 1). \qquad (2)$$

Isso quer dizer que, se o real estado da natureza for A, então é mais provavel que o sinal recebido pelo agente seja Si = 0 , e se o estado da natureza for B, então é mais provavel que o agente receba o sinal Si = 1. Denominaremos essa descrição de informação coletiva e preferências como modelo 1.

Após observar o seu sinal, cada indivíduo irá escolher a alternativa {A, B} que maximizaria a sua utilidade esperada. Baseado na sua informação privada, cada indivíduo poderá mudar as suas crenças iniciais quanto a p. Isto quer dizer que, se o agente i receber o sinal Si = 0, então o ótimo para ele será escolher a alternativa C. Caso ele receba um sinal Si = 1, a melhor alternativa para ele sera D. Aqui cabe ressaltar que cada agente escolhe uma determinada alternativa como se ele sozinho fosse definir o resultado do jogo. Isso quer dizer que cada agente deve votar como se estivesse em uma situação de ditadura.

De acordo com a equação 1, a utilidade esperada de se escolher a alternativa C é igual a probabilidade do real estado da natureza ser A. Assim como a utilidade esperada de D é a probabilidade do estado B ser o verdadeiro. Aplicando a regra de Bayes e resolvendo com a equação 2, temos

$$\Pr(A \mid Si = 0) = (p^*.qa) / [p^*.qa + (1 - p^*).(1 - qb)']$$

$$\Pr(B \mid Si = 0) = (1 - p^*).(1 - qb) / [p^*.qa + (1 - p^*).(1 - qb)']$$

$$\Pr(B \mid Si = 1) = (1 - p).qb / [p^*.(1 - qa) + (1 - p^*).qb']$$

$$\Pr(A \mid Si = 1) = p.(1 - qa) / [p^*.(1 - qa) + (1 - p^*).\ qb']$$

Com isso temos que

$$E[Ui(C, -) \mid Si = 0] \text{ é maior que } E[Ui(D, -) \mid Si = 0] \leftrightarrow$$

$$p.qa \text{ é maior que } (1 - p^*).(1 - qb) \qquad (3)$$

$$E[Ui(D, -) \mid Si = 1] \text{ é maior que } E[Ui(C, -) \mid Si = 1] \leftrightarrow$$

$$(1 - p^*).qb \text{ é maior que } p^*.(1 - qa)\ (4)$$

Dessa forma mostramos que o agente i maximiza sua utilidade esperada quando vota sinceramente, ou seja, quando escolhe a alternativa C ao receber o sinal Si = 0, ou quando escolhe a alternativa B ao receber o sinal Si = 1.

Vale destacar que, apesar da mudança das crenças dos indivíduos quanto ao estado de natureza, as suas preferências serão sempre simétricas. Antes de cada indivíduo receber o seu sinal, todos tem crenças simétricas quanto ao estado da natureza e, caso a eleição ocorra nesse estágio, todos escolheriam a mesma alternativa. Quando os indivíduos recebem o seu sinal privado, as estratégias de votação ótimas serão distintas, apesar do voto ser informativo e de todos possuirem as mesmas preferências. Temos que, quando os agentes revelam sua informação privada através do voto (votando informativamente), toda a informação presente nesta sociedade quanto ao estado de natureza é revelada.

Vamos aqui definir a regra de maioria como a regra que definira o resultado deste jogo. Para uma alternativa {C, D} ser escolhida na eleição, é preciso que haja um número de votos K(S) maior que K*, onde K* = (n – 1) / 2. Dado o vetor S = (S1, S2, ..., Sn), temos que K(S) = Σ Si.

De acordo com a equação 2, vemos que quanto maior for K(S), ou seja, quanto maior for o número de indivíduos que receberam o sinal S=1, maior é a probabilidade de que o real estado de natureza seja B e menor a de que seja A.

A probabilidade de que o indivíduo i vote corretamente, dado que a sua estratégia é informativa, é

$$pi = Pr[Si = 0 \mid A].Pr[A] + Pr[Si = 1 \mid B].Pr[B]$$

$$= p^*.qa + (1 - p^*).qb \text{ é maior que 0,5, para todo i pertencente a N,} \qquad (5)$$

Enquanto a probabilidade de qualquer par de individuos (i, j) tomar a decisão correta é dada por

$$pij = Pr[Si = 0 \text{ e } Sj = 0] \mid A].Pr[A] + Pr[Si = 1 \text{ e } Sj = 1 \mid B].Pr[B]$$
$$= p^*.(qa^2) + (1 - p^*).(qb^2) \qquad (6)$$

Vamos supor que $qa = qb = q$, ou seja, a probabilidade de $Si = 0$ quando o real estado de natureza é A, é a mesma de $Si = 1$ quando o estado de natureza é B. Sob essa suposição, se todos os idivíduos votam informativamente, então a probabilidade de o indivíduo i votar corretamente é independente da do indivíduo j: $pi = p^*.q + (1 - p^*).q = q$, e logo, $pij = p^*.(q^2) + (1 - p^*).(q^2) = q^2 = pi^2$

Como as probabilidades de se votar corretamente são independentes, então temos que o voto de cada agente agrega informação à eleição. Vamos supor que o real estado de natureza é B, logo a alternativa correta é D. Consideraremos a probabilidade de mais da metade dos agentes escolher a alternativa correta igual a

$$Pn = Pr[\, K(S) \geq K^*], \text{ onde}$$
$$K(S) = \Sigma\, Si$$

No teorema do juri, os votos são estatisticamente independentes, como visto acima. Além disso como a probabilidade de um indivíduo tomar a decisão correta qb pertencente a (1/2, 1), temos que Pn é maior que pi e $Pn \rightarrow 1$ quando o número de eleitores tende a infinito. Como supomos que $qa = qb = q$, então a probabilidade de se tomar a decisão correta quando o estado de natureza é A é a mesma. Podemos assim ver claramente que com a agregação das informações dos agentes, a probabilidade de se tomar a decisão certa é consideravelmente maior do que quando apenas um único agente decide, o que, dado o modelo, nos mostra que a alternativa escolhida por regra de maioria, maximiza o bem-estar da sociedade.

Agora precisamos nos perguntar qual a relevância do teorema, o que querem dizer os resultados obtidos e até que ponto eles são válidos. Será que as suposições feitas pelo Teorema do Júri quanto ao comportamento dos agentes e à agregação de suas preferências são plausíveis de ocorrer no mundo real?

Capítulo 2: Introduzindo agentes racionais

Usualmente, a análise da questão de como eleições agregam informação, e se o fazem de maneira ótima, parte da suposição de que todos os agentes têm preferências idênticas e de que cada um deles se comporta ingênuamente, isto é, escolhe a alternativa que maximixa a sua utilidade esperada quando o seu voto determina o resultado. Entretanto, o que veremos mais adiante é que o voto ingênuo, ou sincero, não é um equilibrio em todas os jogos possíveis. Mais especificamente, o que veremos é que o voto sinsero, utilizado na obra de Condorcet, funciona razoavelmente bem para grandes grupos de eleitores, mas em pequenos grupos o resultado pode ser catastrófico.

Os agentes enfrentam um problema de decisão similar àquele do bidder em um leilão de valor comum (*common value auction*). Tanto em eleições quanto em leilões, as ações dos agentes alteram seus payoffs apenas em situações muito específicas. No leilão de valor comum, por exemplo, todos os agentes tem as mesmas preferências pelo bem, mas cada um tem uma diferente estimativa da utilidade desse bem. Se a média das estimativas representar o real valor do bem, então o ganhador do jogo estará sobrevalorizando o bem. Desta forma cada bidder deve condicionar suas crenças quanto ao valor do bem na ocasião em que o seu lance for o mais alto. Similarmente em nosso modelo de eleição, os agentes devem condicionar as suas crenças, em relação à alternativa a ser escolhida, ao evento em que um voto pode mudar o resultado da eleição. Cada indivíduo deve atualizar as suas crenças baseado na probabilidade de existir um eleitor mediano, cujo voto é pivô e pode decidir o resultado do jogo. Vamos estudar a seguir um exemplo[2] no qual este conceito se aplica.

Vamos supor que tenhamos uma comunidade que deve decidir se uma proposta de elevação do gasto com educação deve ser aceita ou não. Existem dois estados de natureza com igual probabilidade: a proposta pode funcionar (f), aumentando o aproveitamento dos alunos e reduzindo o grau de desistência, ou não (nf). Todos na comunidade são a favor da proposta no estado de natureza f e se opõem a ela no estado nf. Nenhum agente conhece o real estado da natureza, mas cada um recebe um sinal dentre duas possibilidades: no estado f, cada agente recebe o sinal f com probabilidade igual a 0,6, enquanto no estado nf a probabilidade de se receber sinal f é 0,4. A regra de votação aplicada é tal que a proposta é aceita se ao menos 2/3 dos agentes votam a favor. Se todos eleitores votam sinceramente, então cada um votará a favor se receber o sinal f e votará contra, caso contrário. Então, em uma grande eleição, sempre que um voto é pivô, ou seja, sempre que 2/3 dos agentes votarem a favor da proposta, pode-se dizer com certeza quase absoluta que o real estado da natureza é f, o que deveria levar todos os agentes a votar a favor.

O que vemos no exemplo é que, ao perceber que 2/3 dos agentes são a favor da proposta, cada agente deve mudar as suas crenças do real estado de natureza. Como agora todos acreditam que f é o real estado de natureza, todos deverão votar a favor da proposta. Podemos observar que os individuos não mais votam independentemente uns dos outros, mas atualizam suas crenças na medida em que observam os sinais dos outros.

---

[2] FEDDERSEN, T. e W. PESENDORFER (1997) Voting Behavior and Information Aggregation in Elections With Private Information. Econometrica, 65-5, pp 1029-1058.

Seção 2.1: Suposições restritivas do Teorema do Júri

Na verdade, um grande porém do Teorema do Júri de Condorcet é que ele faz duas suposições muito restritivas: a de que individuos votam independentemente, isto é, o voto de um agente não afeta o de outro, e a de que todos tem um mesmo objetivo, ou seja, preferências simétricas. Certamente, estas suposições restringem a aplicação do teorema na estilização de politica democratica e de diversas outras outras situações similares na realidade.

Pode-se argumentar que, apesar de toda a sua contribuição para o estudo de escolhas públicas (tradução livre para *public choice*), o grande problema do Teorema do Jurí original é que a suposição de votos independentes não é razoável. É algo impossível de se imaginar que eleitores não se comunicam, e que eles não possuem informação comum, cultura, religião, crenças, ou qualquer outro elemento que leve a votos correlacionados.

Vamos agora estudar as principais suposições do Teorema do Júri para entender qual é o real significado de cada uma delas na realidade[3]. Iremos posteriormente aplicar a ele o voto correlacionado, ou seja, supor que idividuos atualizam suas crenças e adaptam seus votos de acordo com os sinais recebidos pelos outros individuos, levando assim toda a sociedade a níveis mais altos de bem-estar.

[3] LADHA, K. K. (1992) The Condorcet Jury Theorem, Free Speech, and Correlated Votes. American Journal of Political Science, 36-3, pp 617-434.

O que significa q pertencente a (1/2, 1) ?

Analisemos agora qual o fundamento de termos q maior do que 0,5. Suponhamos que se tenha uma moeda que dá cara com uma probabilidade p. Mesmo sem saber o valor exato de p, eu sei que p pertence a {0,6; 0,3}. Eu dou a moeda a um júri, explicando que p é igual a 0,6 (estado A) ou 0,3 (estado B). Antes de votar para A ou B, cada jurado pode observar, individualmente, o resultado de k testes, mas é proibido de observar o resultado do teste de qualquer outro jurado. Suponha que cada jurado escolherá A se obtiver uma proporção mínima Ti de resultados cara observados.

Consideremos um jurado que escolhe A se a proporção de caras observada em k testes for superior a 0,45. Se o real estado da natureza for p = 0,6 e k = 3, então o jurado escolherá A se obtiver pelo menos 2 resultados cara no teste. Da mesma forma, se o real estado de natureza for p = 0,3 e k = 2, então ele irá escolher B apenas se ele observar duas coroas em seus testes. De maneira geral temos que, dada a proporção mínima Ti = 0,45 de caras para o jurado escolher cara, então sempre que k for maior do que 2, este jurado irá escolher o real estado de natureza com probabilidade maior do 0,5.

Temos então que, supor q maior que 0,5 significa que cada jurado terá informação suficiente, porém incompleta, sobre o real estado da natureza. Espera-se que a informação recebida pelos jurados estará intimamente relacionada com o verdadeiro estado de natureza. Podemos esperar um maior número de caras nos testes quando p = 0,6 do que na situação em que p = 0,3. Além disso, quanto maior o numero k de testes, espera-se que os jurados escolham o real estado de natureza com maior probabilidade do que escolheriam o estado falso. Essa é a essência da suposição de q é maior do que 0,5.

<u>Votos correlacionados</u>

Um indivíduo que assiste ao jogo apresentado no item anterior sabe que o voto de cada jurado é independe do voto dos outros, pois os jurados recebem informações independentes e não se comunicam um com o outro. Este indivíduo também sabe que, com um número razoável de testes, cada jurado irá votar para o real estado de natureza com probabilidade maior do que 0,5. Se ele tivesse de escolher, assim como os jurados, quanto ao real estado de natureza, ele poderia apenas escolher a alternativa da maioria e fazer a escolha certa com uma probabilidade maior do que qualquer outro jurado. Supondo que a maximização da utilidade deste indíduo é dada pela maximização da probabilidade de escolha da alternativa correta, a situação ótima para ele, e para todo o júri, é aquela na qual ele sempre escolhe a alternativa da maioria. Um indivíduo que maximiza a sua utilidade através do voto condiciona suas crenças às crenças dos outros agentes e desta forma fica evidente que seu votos será altamente correlacionado ao dos outros.

Suponhamos agora que os jurados não recebem informação privada. Todos eles observam conjuntamente o resultado de 100 julgamentos. Para alguém de fora que não conhece os resultados, mas sabe que cada jurado observa o mesmo resultado, os votos do júri não são independentes. De fato, os votos deverão ser positivamente, ou mesmo perfeitamente, correlacionados, uma vez que a maior fonte de correlação entre os votos do júri é a informação que eles tem em comum. Na vida real é evidente que os votos dos jurados serão similares, pois eles estão expostos ao mesmo tipo de informação apresentada por testemunhas, promotores etc.

Decisões no mundo real, no entanto, não são tão simples como escolher entre duas possíveis realizações de um jogo de cara e coroa. Neste exemplo, os resultados são de fácil quantificação com pouco espaço para subjetividade na interpretação dos resultados. Em contraponto, quando confrotados com a realidade, o exemplo pode não ser efetivamente aplicável. Indivíduos podem ter fortes crenças, anteriores ao jogo, do que é o melhor e podem ter interpretações conflitantes e subjetivas sobre as informações reveladas durante a escolha.

Vamos agora buscar entender através do modelo proposto por Ladha[4] como essas interações acontecem na realidade. Consideremos um grupo de juízes que ao perseguir uma política *antitrust* devem deliberar sobre um caso que envolve a proposta de fusão de duas firmas. Sabemos que todos os juízes buscam maximizar a utilidade do consumidor. Todos eles recebem as mesmas evidências e argumentos em relação ao mercado, o número de firmas estrangeiras e domésticas, a fatia de mercado de cada firma, as barreiras à entrada, as economias de escala provenientes da possível fusão e os benefícios aos consumidores.

Os juízes interpretam a evidência, se comunicam uns com os outros, e ao fazê-lo, influênciam as decisões uns dos outros. Eventualmente alguns juízes votarão contra (alternativa nf) e outros, a favor (alternativa f) da proposta. Vamos supor que cada juiz começa com uma crença ex ante de que f é melhor do nf, interpreta as evidências apresentadas no tribunal, e acaba com uma nova probabilidade de f ser melhor do que nf. Se a probabilidade posterior ultrapassar a valor limite do juiz, então ele escolerá f. Se for menor ele irá escolher nf.

A crença ex ante de um juiz e a sua interpretação das evidências está, em geral, alinhada com uma das diversas correntes de pensamento quanto à política *antitrust*. Um

4 LADHA, K. K. (1992) The Condorcet Jury Theorem, Free Speech, and Correlated Votes. American Journal of Political Science, 36-3, pp 617-434.

juiz que se alia a uma determinada corrente de pensamento deverá compartilhar das opiniões desta corrente quanto aos efeitos da fusão das empresas sobre o consumidor. Como cada corrente deve ser antiga, as suas crenças e de seus seguidores deve ser razoavelmente rígidos. Isto quer dizer que a apresentação das evidências no julgamento deve ter pouco impacto nas crenças ex ante do juiz.

Um indivíduo capaz de observar que as crenças ex ante dos juízes são correlacionadas, que eles recebem as mesmas evidências e que eles se comunicam uns com os outros deve acreditar que os seus votos também serão correlacionados. Além do mais, os votos de dois juízes que pertencem à mesma, ou similar, corrente de pensamento deverá ser positivamente correlacionado. Já para os juízes que pertencerem à correntes de pensamento opostas, seus votos deverão ser negativamente correlacionados.

Em suma, no mundo real os votos dos agentes podem ser correlacionados por que eles compartilham informações comuns, se comunicam uns com os outros e são influenciados pelas diferentes correntes de pensamento ou pela opinião de líderes influentes com os quais compartilham pontos de vista.

Seção 2.2: Equilíbrio de Nash e escolhas ótimas

Como já discutimos na primeira parte do capítulo, é altamente improvável que os agentes utilizem como única fonte de informação o sinal que recebem durante o jogo e que o seu voto sejá o perfeito reflexo disso. No mundo real nos deparamos com agentes racionais que entendem que as suas ações poderão mudar o resultado do jogo e alterar a utilidade dos outros agentes. Cabe agora nos perguntarmos até que ponto as conclusões advindas do Teorema do Júri se manterão válidas em um mundo em que os agentes são racionais e o perfil de estratégias é um equilíbrio de Nash.

Assim como demonstraram alguns acadêmicos iremos agora comprovar, com base no trabalho de McLennan[5], que, sob condições bastante gerais, quando o voto sincero tem as propriedades necessárias descritas por Condorcet, então existirão equilíbrios de Nash que também possuem essas propriedades. No modelo que estudaremos agora, vamos continuar com as suposições de que todos os indivíduos possuem as mesmas preferências, tal que, independente da regra de votação, o jogo é de interesse comum. Isto quer dizer que todos o agentes possuirão a mesma função de utilidade. O argumento chave aqui é que, para o jogo que demonstraremos, um vetor de estratégias mistas que é ótimo, no sentido de maximizar a função de utilidade comum, é um necessariamente um equilíbrio de Nash. Também podem haver outros equilíbrios que não são ótimos. O que temos é que, para jogos de votação, um perfil de estratégias será um equlíbrio de Nash se nenhum agente puder sozinho reverter o resultado do jogo ao mudar o seu voto.

5 MCLENNAN, A. (1998) Consequences of the Condorcet Jury Theorem for Benefical Information Aggregation by Rational Agents. American Political Science Review, 92-2, pp 413-418.

No modelo de Condorcet isso implica que, sempre que o voto sincero for um melhor agregador das preferências dos agentes do que uma ditadura, ou seja, um único indivíduo escolhendo por toda a sociedade, então um perfil de estratégias ótimo será tão bom quanto um perfil de apenas votos siceros e será um equilíbrio. Adicionalmente, quando uma população de eleitores cresce, um perfil de estratégias ótimo tende assintoticamente à tomada de decisões perfeita sempre que o perfil de votos sinceros também tender.

Existe a possibilidade de o perfil de estratégias ótimo conseguir agregar informação quando o voto sincero não pode fazê-lo. Utilizaremos o modelo do júri, onde deve-se decidir entre absolver (alternativa A) ou condenar o réu (alternativa C), para demonstrar como isso se dá. O real estado de natureza pode ser A, quando o réu é inocente, ou C, quando o réu é culpado. Para não carregar a notação e simplificar os cálculos, também denotaremos os sinais recebidos pelos agentes por A, sinal de que o réu é inocente, ou C, sinal de que o réu é culpado.

Vamos supor que a probabilidade ex ante de ambos os possíveis estados de natureza é igual. Entende-se por isso que a probabilidade de um agente receber o sinal A quando a alternativa correta é A é igual a 2/3 e de receber o sinal C quando C é a alternativa correta também é 2/3. Temos também que o sinal recebido por cada um dos agentes quanto ao real estado de natureza deve ser estatisticamente independente, que A é a melhor escolha quando A é o estado de natureza e que C é a melhor escolha quando C é o estado.

Se for terrível para os agentes condenar o réu quando ele é inocene, porém apenas indesejável absolvê-lo quando ele é culpado, ou seja, se a desutilidade de se condenar o inocente for muito maior do que a de absolver o culpado, então os agentes que votam sinceramente irão sempre escolher a alternativa A. Por outro lado, se a população for grande o suficiente, os *payoffs* sob a regra de maioria serão maiores se cada agente votar o seu sinal. Este fenômeno, comprovado pela Lei dos Grandes Números e descrito no capítulo 1 deste trabalho, acontece por que, quanto maior o número de eleitores votando o seu sinal, maior será a probabilidade de se escolher a alternativa correta. Tal comportamento não pode ser descrito como um equilíbrio, porém haverão equilíbrios ótimos que agregarão informação de forma muito mais eficiente.

Para mostrar como o perfil ótimo de estratégias no espaço de perfis simétricos pode não ser ótimo no espaço de todos os perfis, nós utilisaremos o exemplo acima descrito para demonstrá-lo. A regra de votação é tal que, o réu só poderá ser condenado com unanimidade e, neste exemplo específico, o número de jurados é igual a 3. Para melhor ilustrar as preferências dos agentes de absolver o culpado sobre condenar o inocente, fixaremos que condenar o inocente é 9/8 tão ruim quanto absolver o culpado, de forma que cada jurado estará indiferente entre escolher A ou C quando a probabilidade de culpa for 9/17. Existe um equlíbrio onde um dos jurados sempre vota para culpado, enquanto os outros dois votam informativamente, revelando o sinal recebido. Para ver como o jurado que sempre vota para culpado prefere fazê-lo mesmo ao receber um sinal de inocente, considere a opção em que o voto é relevante, leia-se os outros dois jurados escolheram a opção C. Mesmo que o jurado tenha recebido um sinal A, ele saberá que os outros dois jurados receberam sinais C e que a probabilidade posterior de que o suspeito seja culpado é igual a 2/3, sendo suficiente para garantir a condeção. Se estabelecermos que a utilidade de se absolver um culpado é igual a -1, nós podemos calcular que a utilidade esperada neste equlíbrio é igual a soma das probabilidades ex ante de culpa ou inocência vezes a probabilidade de se cometer um erro vezes a perda advinda do erro que é igual a:

$$(1/2) \cdot [(1/3)^2] \cdot (-9/8) + (1/2) \cdot [1 - (2/3)^2] \cdot (-1) = -49/144$$

Comparando a utilidade esperada desta estratégia, com aquela em que todos os agentes votam informativamente, temos que a utilidade esperada do perfil de estratégias simétricas com voto sincero é:

$$(1/2) \cdot [(1/3)^3] \cdot (-9/8) + (1/2) \cdot [1 - (2/3)^3] \cdot (-1) = -0{,}3727$$

Vemos então facilmente que a utilidade obtida com três agentes votando informativamente é menor que a utilidade esperada com dois agentes votando sinceramente e um sempre escolhendo C. O que podemos comprovar com este resultado é que um perfil de estratégias em que todos os indivíduos votam sinceramente não é um equilíbrio de Nash, uma vez que um agente pode fixar seu voto em C, aumentando o seu *payoff* e obtendo uma utilidade esperada –49/144 maior do que a utilidade esperada –0,3727 de quando todos os agentes votam de acordo com os seus sinais, que seria o perfil de estratégias de voto sincero.

Podemos comparar este resultado com aquele obtido com um equilíbrio simétrico em que cada agente escolhe votar para o seu respectivo sinal com uma probabilidade igual a p. Se todos os agentes se comportarem desta forma, então teremos um equilíbrio quando um agente com um sinal A for indeferente entre as duas alternativas, o que acontence quando a probabilidade posterior de culpa, supondo que os outros dois agentes escolheram a alternativa C, é igual a probabilidade de culpa de corte, que deixa os agentes indiferentes entre A e C dadas as desutilidades de se condenar o inocente ou absolver o culpado:

$$9/17 = \{1/3\ [2/3 + 1/3\ (1 - p)]^2\} / \{1/3\ [2/3 + 1/3\ (1 - p)]^2 + 2/3\ [1/3 + 2/3\ (1 - p)]^2\}$$

Encontramos que o valor de p que satisfaz esta equação é 3/4. A utilidade esperada deste perfil de estratégias é:

$$1/2\ [1/3 + 2/3\ (1 - p)]^2 \cdot (-9/8) + 1/2\ \{1 - [2/3 + 1/3\ (1 - p)^3]\} \cdot (-1)$$
$$= (-13/32) < (-49/144).$$

Uma estratégia na qual um jurado vota as vezes para A quando rece um sinal C e para C quando recebe um sinal A pode ser uma melhor resposta apenas quando o jurado não é pivotal. Sempre que o voto deste jurado, puder afetar o resultado deste jogo, quando ele é o eleitor da mediana, então a estratégia acima descrita não é ótima, dado que a utilidade esperada referente a esta estratégia é menor do que aquela do eleitor que escolhe sempre a alternativa C, enquanto os outros dois votam informativamente. Generalizando este resultado para o número de casos, fica fácil de demonstrar que o outro único equilíbrio simétrico tem todos os agentes votando para A com probabilidade 1 independente do sinal. Este perfil de estratégias nos daria uma utilidade esperada igual a probabilidade ex ante de culpa ou inocência vezes a probabilidade de se escolher a opção errada vezes a desutilidade gerada pelo erro que é:

$$(1/2) \cdot (0^3) \cdot (-9/8) + (1/2) \cdot (1^3) \cdot (-1)$$
$$= (-1/2) < (-13/32)$$

Então o equilíbrio simétrico em que os agentes votam de acordo com os seus sinais com uma probabilidade p é ótimo no conjunto de equilíbrios simétricos e, portanto, é ótimo no conjunto de perfis simétricos.

Em suma, os resultados aqui obtidos podem servir para novamente comprovar a relevância do Teorema do Júri de Condorcet para agentes racionais. Uma versão estatística sincera do resultado implica em uma versão estratégica racional. A comprovação da eficácia da regra de maioria obtida desta forma é, por outro lado, em um certo sentido, mais fraca do que aquela demonstrada pelo modelo original de Condorcet. Isso se dá porque existem diversas outras regras de votação diferentes da regra de maioria para os quais diferentes suposições quanto ao comportamente dos agentes levam a decisões que são superiores a uma situação de ditadura, ou que geram maior retorno na função de utilidade comum, que é condição suficiente para que os resultados aqui obtidos sejam aplicáveis. Outra questão que fica aqui evidenciada é que, ao considerar agentes como seres racionais, fica cada vez menos plausível que não haja comunicação entre os agentes anteriormente à votação, seja num modelo que utiliza a regra de maioria para a decisão, seja num onde as decisões são tomadas por um único agente. De fato, no modelo de Condorcet, a suposição de que não há comunicação entre os agentes já é bastante forte e restritiva, porém agora que consideramos agentes racionais, é extremamente difícil de se imaginar um mundo em que agentes não trocam opiniões e não são influênciados pelos sinais uns dos outros.

Capítulo 3: A relevância da comunicação entre agentes

Com base nos argumentos de Ladha[6], nesta seção discutiremos a importância da comunicação entre os agentes anteriormente à votação e a sua relevância na correlação entre os votos. Notadamente, o que vemos nas sociedades democráticas modernas é uma valorização do diálogo, da disseminação da informação disponível entre indivíduos e das diferentes interpretações destas. Os indivíduos podem expressar suas crenças e opiniões e buscar persuadir outros da sua pertinência. De fato, o debate e a troca de informações e opiniões são do interesse desta sociedade. Assim como vemos nas atuais sociedades democráticas, a tendência é de que, com o passar do tempo, se formem diferentes correntes de pensamento quanto a realizações de escolhas que busquem o interesse público.

A priori cada agente recebe realmente um sinal particular, seja uma informação privada ou uma diferente interpretação de uma informação comum, porém sempre haverão grupos de pessoas que possuem sinais similares quanto à tomada de decisão das estruturas e instituições públicas, ou mais genericamente das decisões que são de interesse público. Das correntes de pensamento, algumas poderão ser fortemente alinhadas, enquanto podem ser o completo oposto umas das outras. Aqui, no entanto, o mais relevante é que, com a disponibilidade de informação, os agentes terão diferentes pontos de vista que não são condicionados às suas próprias experiências.

Sociedades autoritárias ou ditatoriais, por outro lado, restringem a disseminação de informação e a difusão de diferentes opiniões e interpretações das ações que afetam o

6 LADHA, K. K. (1992) The Condorcet Jury Theorem, Free Speech, and Correlated Votes. American Journal of Political Science, 36-3, pp 617-434.

interesse público. Desta forma os indivíduos não têm acesso a diferentes pontos de vista e são normalmente limitados às suas próprias experiências e às daqueles que estão mais próximos. O voto em algumas destas sociedades, nos casos raros onde ele existe, têm pouco significado prático, e quando acontece está alinhado às preferências do ditador. O votos serão quase que perfeitamente correlacionados. A escolha realizada pela rega de maioria não é necessariamente melhor do que as do ditador, uma vez que o votos das pessoas não refletem os sinais que elas recebem. O que pode-se argumentar é que a existência de voto não significa que a sociedade é democrática, mas nas sociedade democráticas as escolhas são feitas necessariamente através do voto. Para que uma sociedade onde as escolhas públicas se dão através de votação seja equivalente a uma democracia são necessárias diversas instituições que organizem as correntes de pensamento, como partidos políticos e liberdade de expressão que, associados com a proteção do voto, levarão os indivíduos a revelar suas preferências através do voto.

Assim como nos modelos em que estudamos, a agregação das informações privadas dos indivíduos também na vida real deve levar a sociedade a uma situação de maior utilidade no cronfonto com uma ditadura. De acordo com o que vimos no capítulo, o que a Lei dos grandes números nos diz é que quanto maior o número de indivíduos que participam efetivamente no processo de escolha e revelam informativamente suas preferências, maior as chances de se fazer a escolha ótima e maximizar o bem-estar comum. A partir do segundo capítulo vimos que, mesmo com indivíduos que não votam informativamente e que tem o voto influênciado pelo comportamento dos outros, a agregação das preferências de agentes racionais, ou o resultado da eleição neste novo modelo, poderá levar a sociedade a um nível de bem estar mais alto do que na ocasião do voto informativo e conseqëntemente a uma utilidade comum sensívelmente maior do que na ditadura.

A liberdade de expressão permite aos indivíduos se alinhar a diferentes escolas de pensamento, anunciar idéias opostar e votar diferentemente. Formalmente, votos de diferentes indivíduos i e j seriam negativamente correlacionados se $Pr(Xi = 1 \mid Xj = 1) < Pr(Xi = 1)$, isto é, se os agentes tendem a se opor ou a se alinhar a diferentes correntes de pensamento. A liberdade de expressão cria espaço para a existência de baixa o negativa correlação entre as escolhas dos agentes e ,caso a probabilidade de um indivíduo receber o sinal correto for maior do que 0,5, deve, por conseqüente, tornar mais eficaz o processo decisório.

Sabemos também que não basta que haja liberdade de expressão e comunicação entre os agentes para que a escolha através da regra de maioria seja mais eficiente do que a de uma ditadura. Se por exemplo p for menor do que 1/2, ou seja, se a probabilidade de um indivíduo receber um sinal β quando o real estado da natureza é β for menor do que 1/2, então, como já vimos na seção 2.1, a utilidade esperada da situação em que um único indivíduo decide o resultado da eleição é maior do que aquele na situação em que a regra de maioria é aplicada. Isto pode acontecer, por exemplo, porque uma corrente de pensamento incapaz de levar a uma escolha ótima consiga agregar um número suficiente de simpatizantes de modo a fazer com que β seja menor do que 1/2.

Desta forma podemos compreender que a eficácia da regra de maioria depende, não só da existência de livre comunicação entre os agentes, mas também da capacidade dos indivíduos de discernir entre quais das diferentes correntes de pensamento poderiam agregar informação eficientemente, ou, mais genericamente, possua um β maior do que 1/2. O que queremos dizer aqui é que, apesar de fundamental para o bom funcionamento da sociedade democrática, a existência de comunicação entre os agentes não é condição suficiente para que a regra de maioria maximize a função comum de utilidade dos indivíduos, ou mesmo que leve esta sociedade a um nível de utilidade superior ao que prevaleceria caso se tratasse de uma ditadura.

Conclusão

O objetivo deste trabalho foi dissecar o Teorema do Júri e testar a sua relevância no mundo real. Para isso, num primeiro momento, estudou-se a fundo as premissas desse modelo e toda a sua fundamentação matemática. O que vimos foi que, sob uma série de hipotéses bastante restritivas, um grupo de pessoas que escolhe entre duas alternativas irá sempre escolher de forma mais eficiente do que um indivíduo que decide sozinho. Apesar dos resultados positivos, era evidente que as premissas do modelo para a obtenção dos resultados eram demasiado restritivas.

Já no segundo capítulo, abrimos mão de uma das hipóteses menos factíveis, que eram agentes que votam informativamente, e comprovamos que agentes que atualizam suas crenças podem alcançar níveis de utilidade sensivelmente mais altos do que agentes que votam de acordo com o sinal que recebem. Mais especificamente, encontramos que, sob determinadas condições, ter agentes que votam informativamente pode não ser eficiente no sentido de Pareto e não ser um equilíbrio de Nash.

O resultado principal obtido foi que, para grandes grupos de indivíduos, assim como mostra a Lei dos Grandes Números, agentes que votam sinceramente, em geral, conseguem alcançar a escolha ótima e maximizar o bem-estar da sociedade. No entanto, quando analisamos pequenos grupos, vemos que agentes racionais atualizam suas crenças e chegam a resultados mais eficientes do que aqueles que votam de acordo com o seu sinal.

Na aplicação de teoria política no mundo real e na formulação de políticas públicas, temos que, nos casos em que o eleitorado é consideravelmente grande, as suposições de Condorcet quanto ao comportamento dos agentes e a aplicação da regra de maioria podem ser bastante satisfatórios. No entanto, conforme vimos no capítulo três, é preciso que a correlação entre os votos dos agentes seja suficiente baixa, indicando que os indivíduos possuem liberdade de pensamente e expressão, e que o sinal recebido pelo agente seja a escolha correta com probabilidade maior do que 0,5, indicando que agentes têm discernimento suficiente para fazer a ecolha ótima com probabilidade maior do fariam a escolha errada.

Referências Bibliográficas

CONDORCET, A. (1785) **Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des décisions Rendues à la Pluralité des voix**. Imprimerie Royale, Paris

LADHA, K. K. (1992) **The Condorcet Jury Theorem, Free Speech, and Correlated Votes.** American Journal of Political Science, 36-3, pp 617-434.

FEDDERSEN, T. e W. PESENDORFER (1996) **The Swing Voter's Curse.** American Economic Review, 86-3, pp 408-424.

AUSTEN-SMITH, D. e J. BANKS (1996) **Information Aggregation, Rationality, and the Condorcet Jury Theorem.** American Political Science Review, 90-1, pp 34-45.

FEDDERSEN, T. e W. PESENDORFER (1997) **Voting Behavior and Information Aggregation in Elections With Private Information**. Econometrica, 65-5, pp 1029-1058.

FEDDERSEN, T. e W. PESENDORFER (1998) **Convicting the Innocent: The Inferiority of Unanimous Jury Verdicts under Strategic Voting**. American Political Science Review, 92-1, pp 23-35.

MYERSON, R. (1998) **Extended Poisson Games and the Condorcet Jury Theorem.** Games and Economic Behavior, 25-1, pp 111-131.

MCLENNAN, A. (1998) **Consequences of the Condorcet Jury Theorem for Benefical Information Aggregation by Rational Agents.** American Political Science Review, 92-2, pp 413-418.

CRAWFORD, V. P. e N. IRIBERRI (2006) **Fatal Attraction: Salience, Naivete, and Sophistication in Experimental Hide-and-Seek Games**. Mimeo, UCSD.

COSTINOT, A. e N. KARTIK (2006) **On Optimal Voting Rules under Homogeneous Preferences**. Mimeo, UCSD.