



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

ESTIMANDO A ALOCAÇÃO DE FUNDOS MULTIMERCADO BRASILEIROS –  
MÉTODOS PARA REDUÇÃO E SELEÇÃO DE MODELOS

Nome do Aluno: Rafael Lobo Barbosa da Silva

Nº da matrícula: 1511307

Orientador: Alexandre Lowenkron

Junho de 2019



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

ESTIMANDO A ALOCAÇÃO DE FUNDOS MULTIMERCADO BRASILEIROS –  
MÉTODOS PARA REDUÇÃO E SELEÇÃO DE MODELOS

Nome do Aluno: Rafael Lobo Barbosa da Silva

Nº da matrícula: 1511307

Orientador: Alexandre Lowenkron

Junho de 2019

**“Declaro que o presente trabalho é de minha autoria e que não recorri para realiza-lo, a nenhuma forma de ajuda externa, exceto quando autorizado pelo professor tutor.”**

**“As opiniões expressas neste trabalho são de responsabilidade única e exclusiva do autor”**

# Agradecimentos

Eu dedico esta parte pré-textual do meu trabalho de conclusão de curso às pessoas sem as quais a confecção deste trabalho não teria sido possível, e me apoiaram todas de alguma forma para me tornar quem eu sou hoje.

Primeiramente, agradeço a Deus, que é a causa primeira de todas as coisas no universo e além, e nos agraciou com o livre arbítrio para questionar e ter a graça de compreender Sua criação. Agradeço também ao meu anjo da guarda, minha avó Ivonette e meu avô Renan, que me iluminam com sua luz de amor que emana de onde me guardam e observam.

Agradeço à minha família, minha pedra fundamental, por me passar valores que levo para toda a vida que seguir, e me apoiou de todas as formas, não importasse o custo e o esforço.

Agradeço a Giovanna Pego, que me ama e cuida de mim todos os dias, com uma fonte de amor que me parece inesgotável. Obrigado por ser a parte que me torna completo.

Agradeço aos meus amigos do Colégio Cruzeiro Jacarepaguá, que me apoiaram todos os esses anos e viram todas as versões de mim, desde uma criança inquieta a um jovem obcecado por economia, e espero eu, um bom amigo. Agradeço aos meus amigos da PUC-Rio, que nesse espaço de quatro anos e meio me deram apoio em todas as horas que precisei. Vocês, meus amigos, chegaram de formas diferentes na minha vida, e sou grato por todas as histórias que tive com vocês desde então.

Agradeço aos meus professores do Colégio Cruzeiro Jacarepaguá, em especial Nilo, Carnevale, Diomário, Leo e Ferro, que moldaram as bases e me instigaram a curiosidade pela ciência econômica.

Agradeço aos meus professores da PUC-Rio, em especial o professor Juarez Figueiredo, que se mostrou um incansável guerreiro da difusão conhecimento. Suas aulas me fizeram abrir os olhos para o mundo da Estatística, e me muniram de ferramentas para melhor entender a realidade. Serei eternamente grato por isso, e vou

sempre guardar na memória aquele dia antes da prova que você ficou até além das dez da noite tirando nossas dúvidas na biblioteca.

Agradeço aos meus colegas na Fundação Petros, em especial Daniel Pereira, Felipe, Gabriel, Seixas e Marco, que se mostraram valiosos professores na minha iniciante vida de trabalho e grandes parceiros no nosso desafio diário.

Por fim, agradeço ao meu orientador professor Alexandre Lowenkron, que confiou em mim e me aceitou como seu orientando mesmo com a rotina ocupada que leva e sabendo que só teríamos seis meses para concluir um trabalho que é normalmente feito no curso de um ano. Muito obrigado por ter embarcado comigo nesse desafio.

*para Maria Eduarda*

## Sumário

1. Introdução .....	8
2. Revisão Bibliográfica.....	10
3. A Indústria de Fundos Multimercado Brasileira .....	14
4. O Método de Mínimos Quadrados Ordinários .....	16
5. O Método de Mínimos Quadrados Ponderados .....	19
6. O Método de <i>Elastic Net</i> .....	23
7. <i>Random Walk</i> .....	25
8. Considerações .....	27
9. Conclusão.....	31
10. Bibliografia .....	32

# 1. Introdução

Este trabalho tem por objetivo definir e aplicar técnicas econométricas que possam ajudar na decomposição do retorno dos fundos multimercado no Brasil em fatores de risco. Sua motivação é apresentar técnicas que possam melhorar a alocação eficiente dos recursos financeiros de entidades, buscando diminuir os problemas de assimetria de informação que existem entre o poupador e o investidor. Como motivação local, o Brasil passa no ano corrente por uma fase no ciclo económico de juros baixos e crescimento, ainda que gradual, levando os agentes a tomarem mais risco nos seus investimentos em busca de maiores retornos. Como um *feedback* positivo, muitas novas gestoras surgiram nesse período, e essas não são obrigadas a divulgar seus investimentos por lei ao final do dia, e nesse contexto, tentar inferir a composição do risco desses investimentos é uma medida cautelar adequada para a redução do risco sistêmico que esquemas como *shadow banking* possam proporcionar.

Técnicas para estimar a alocação de recursos por parte de fundos multimercados já são amplamente difundidas e utilizadas na indústria financeira, principalmente nos setores de *Wealth Management* e *Funds of Funds*. A Comissão de Valores Mobiliários (doravante, CVM) divulga depois de um período de três meses a alocação dos fundos, e estes revelam parcialmente a sua alocação em suas cartas mensais aos cotistas. Porém, para a tomada de decisão na indústria, é preciso saber como aquela instituição está posicionada no momento, e aí aplicam-se as técnicas de estimação. Justamente, por tentar atribuir os fatores que explicam o retorno no momento, a amostra de observações não pode ser muito longa, somando a isso o número de fatores que serão utilizados para a regressão como variáveis dependentes, o grau de liberdade na estimação fica reduzido. Mesmo que alguns resultados ficam adequados, pode-se utilizar de técnicas do contexto de *Big Data Analytics* como o *Least Absolute Shrinkage and Selection Operator* (Tibshirani, 1996) (doravante, Lasso), *Adaptive Lasso* (Zou, 2006) (doravante, AdaLasso), ou o *Elastic Net* para melhorar, num sentido de significância estatística, a estimação de alocação nos fatores selecionados.

O primeiro capítulo do trabalho explica os objetivos específicos e motivações gerais do trabalho. O segundo capítulo faz uma breve revisão sobre os trabalhos que



serviram de inspiração para esta tese, mostrando a contribuição de cada um deles nos métodos que serão aplicados na argumentação. O terceiro capítulo se dedica a explicar o funcionamento desta indústria, sua constituição, regulações e especificidades relevantes. Os capítulos 4,5 e 6 se dedicam ao desenvolvimento de métodos para a estimação da alocação dos fundos propriamente dita. O sétimo capítulo apresenta o modelo de RandomWalk, que embora não seja capaz de revelar alguma estimativa da alocação do fundo, consegue prever com relativa acurácia a rentabilidade do fundo, e serve como um *benchmark* adequado para os métodos desenvolvidos nos capítulos 4,5 e 6. O capítulo 7 faz as considerações comparativas entre os diferentes modelos testados. Por fim, o capítulo 8 sintetiza os principais resultados obtidos e concluí o trabalho.

## 2. Revisão Bibliográfica

A literatura acadêmica e a prática já se debruçaram, ambos, intensa e extensivamente nos temas que cercam a atribuição de performance. Enquanto métodos de *machinelearning* ainda não alcançaram a indústria financeira de maneira ampla, na academia, existe uma profusão de artigos sendo publicados em periódicos sobre o tema.

O objetivo deste capítulo é apresentar os trabalhos dessa literatura que alavancaram a inspiração para esta tese, e explicar porque acredita-se que estes métodos podem ser aplicados no contexto de atribuição de performance tendo em vista o curto prazo recente.

O trabalho (Sharpe, 1992), no qual o autor estima o retorno de fundos de investimento com base em fatores de mercado e indicadores de bolsas de ações globais é uma primeira tentativa de decomposição em fatores que este trabalho busca. Uma crítica que outros autores fizeram ao método, no entanto, é a de que nele o autor pressupõe que o investidor mantém relativamente constante a sua alocação para o período que é utilizado para realizar a estimação. Uma possível solução seria reduzir as janelas utilizadas para estimação, porém, o método de mínimos quadrados ordinários (doravante, MQO), ainda que forneça o melhor estimador linear não-viesado (*BLUE*, no acrônimo em inglês), perde eficiência conforme diminui o número de observações, e ainda, um número restrito de fatores arrisca as estatísticas estimadas a possuírem viés por variável omitida ou correlações espúrias. Portanto, num contexto com poucas observações, faz-se necessário aplicar técnicas para melhorar as estimativas dos coeficientes.

No trabalho (Tibshirani, 1996), o autor explica que por padrão são utilizadas duas técnicas, *ridge-regression* e *subsetselection*, para aprimorar as estimativas dentro deste contexto referido acima. No entanto, o autor levanta a seguinte problemática:

“The two standard techniques for improving the OLS estimates, subset selection and ridge regression, both have drawbacks. Subset selection provides interpretable models but can be extremely variable because it is a discrete process - regressors are either retained or dropped from the model. Small changes in the data can result in very

different models being selected and this can reduce its prediction accuracy. Ridge regression is a continuous process that shrinks coefficients and hence is more stable:

however, it does not set any coefficients to 0 and hence does not give an easily interpretable model" - (Tibshirani, 1996)

O autor propõe então, o Lasso, que dado:

- Dados  $(\mathbf{x}^i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , com  $\mathbf{x}^i = (x_{i1}, \dots, x_{ij}, \dots)^T$  definidos respectivamente como variáveis independentes e variável dependente
- Que as observações sejam independentes entre si
- $x_{ij}$  é normalizado, de forma que:
  - $\sum_i \frac{x_{ij}}{N} = 0$
  - $\sum_i \frac{x_{ij}^2}{N} = 1$

Os estimadores de Lasso podem ser estimados pela seguinte minimização:

Seja  $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_j, \dots)$

$$\hat{\beta} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \sum_i \left( y_i - \sum_j \beta_j x_{ij} \right)^2 + \lambda \sum_j |\beta_j|$$

s.t.  $\sum_j |\beta_j| \leq \lambda$

Onde  $\lambda \geq 0$  é o *parâmetro penalizador*. Note que conforme  $\lambda$  tende a 0, poucos coeficientes devem ter valores significantes diferentes de 0. No artigo, Tibshirani mostra o comportamento dos coeficientes estimados conforme  $\lambda$  tende a  $+\infty$ , que mostrado a seguir:

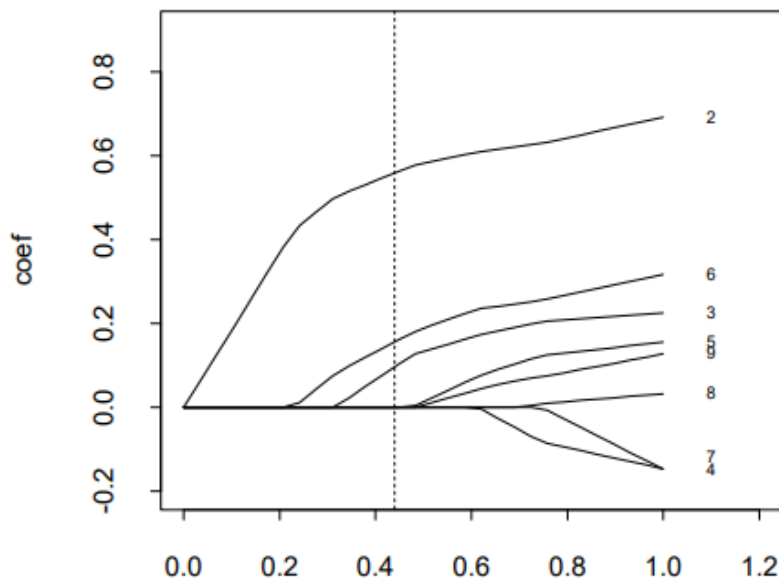


Figura 1 - Extraído de (Tibshirani, 1996)

A questão de qual seria a técnica mais adequada para a seleção do parâmetro  $\lambda$  é abordada no capítulo 4 do artigo citado. O autor frisa:

“However in real problems (...) one might simply choose the most convenient method.”

Como estamos tratando de séries temporais, será utilizado o  $\lambda$  que conseguir retornar o menor valor para o critério de informação de Black.

Outro artigo que faz uma importante contribuição no sentido de refino dessas técnicas econométricas foi (Zou, 2006). O autor identificou corretamente que em alguns casos, os estimadores de Lasso propostos por (Tibshirani, 1996) não possuíam as *oracleproperties* que podem ser definidas como:

1. Identificar corretamente o verdadeiro subconjunto de variáveis relevantes ao modelo.
2. Ter uma razão ótima de estimação em termos de eficiência.

Daí surge a técnica de *Adaptive Lasso*, que evita o *overfit* produzido pelos coeficientes mais significativamente diferentes de 0. Mais especificamente, estamos interessados nos estimadores obtidos através do algoritmo de *Elastic Net*, uma variação

do *Lasso*, que faz uma combinação dos estimadores obtidos com o *Lasso* e uma *ridgeregression*.

Formalmente, o processo de otimização do *Elastic Net* é:

$$\hat{\beta} = \operatorname{argmin} \frac{\sum_i^N (y_i - \sum_{j=1}^J \mathbf{x}^i \beta_j)^2}{2n} + \lambda \left( \alpha \sum_{j=1}^J |\beta_j| \mathbf{x}^i + \frac{(1-\alpha)}{2} \sum_{j=1}^J \beta_j^2 \mathbf{x}^i \right)$$

Com  $\alpha \in [0,1]$

É evidente que quando  $\alpha = 0$ , o que se resulta é uma *ridgeregression*, e no caso oposto quando  $\alpha = 1$ , temos um *Lasso*. Assim como no processo supracitado, escolhe-se a combinação  $(\alpha, \lambda)$  que minimize o BIC.

O propósito desta tese é descobrir como estão alocados os fundos multimercado no Brasil. Estes fundos buscam diversificar seus investimentos numa ampla classe de investimentos para reduzir o risco total de sua aplicação, que é composto pelo risco sistêmico, o risco específico de cada ativo e a correlação entre estes. Aplicando-se os métodos explanados acima, o algoritmo poderia eliminar fatores que ele identificasse que o fundo não estivesse investido, portanto, melhorando em termos de significância estatística sua estimação.

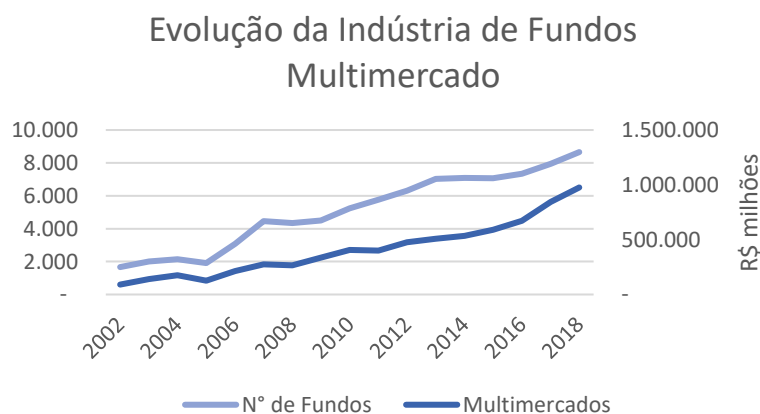
### 3. A Indústria de Fundos Multimercado Brasileira

A Anbima, associação nacional privada de instituições financeiras, define como fundo multimercado aqueles:

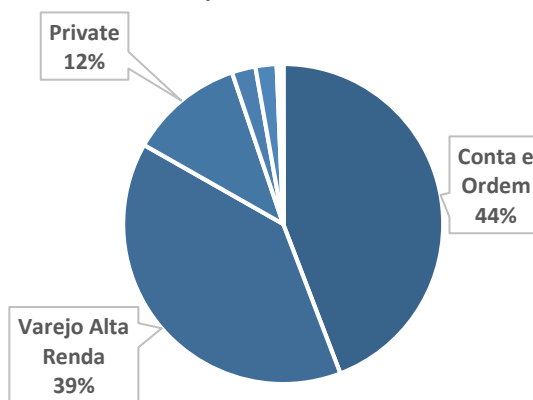
“Fundos com políticas de investimento que envolvam vários fatores de risco, sem o compromisso de concentração em nenhum fator em especial. O hedge cambial da parcela de ativos no exterior é facultativo ao gestor.”- Cartilha da Nova Classificação de Fundos Anbima

A indústria no Brasil cresceu em ritmo forte, principalmente após 2002, e hoje em dia, já soma mais de um trilhão em patrimônio líquido somado, distribuído entre mais de 8000 fundos, servindo à demanda crescente de instituições poupadoras pelo serviço de gestão de patrimônio dessas casas.

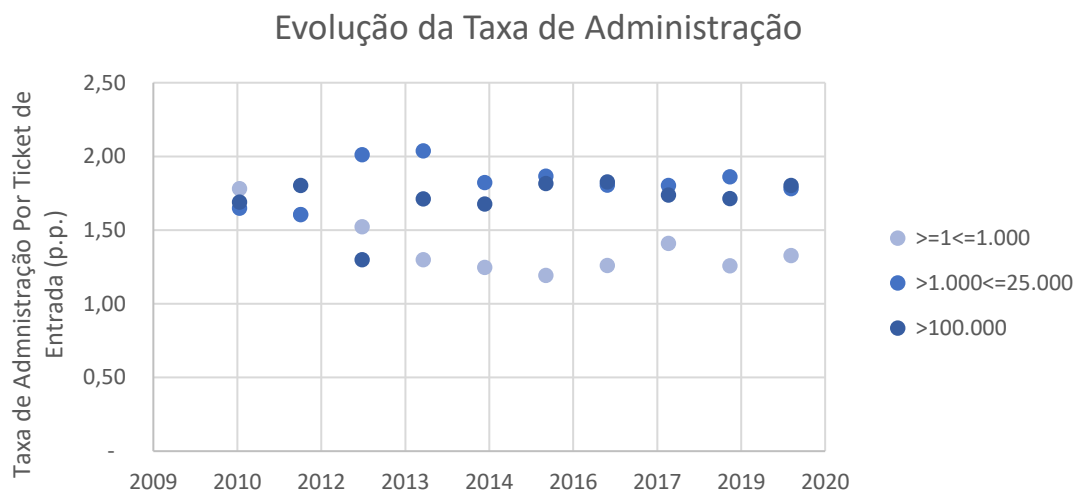
*Gráfico I – Evolução da Indústria de Fundos Multimercado Brasileira*



**Nº de Contas por Classe de Investidor**



Essas gestoras cobram de seus clientes uma taxa de administração, que vai para o custeio das suas operações, manutenção e pagamento à mão de obra. As taxas vem reduzido significativamente com o crescimento da competitividade na indústria e redução da taxa de juros. Por vezes, um fundo master pode ter suas cotas compradas por um fundo de investimento em cotas (doravante, FIC), sobre o qual incide a taxa de administração.



Exatamente por isso, estaremos conduzindo nossa análise sobre os fundos masters, para que a nossa amostra não fique “suja” com as taxas de administração que impactam diariamente a rentabilidade cota divulgada do fundo em questão.

Passamos agora aos métodos que serão utilizados na estimação da alocação e seus resultados.

## 4. O Método de Mínimos Quadrados Ordinários

Primeiramente, estima-se a alocação de acordo com o método proposto em (Sharpe, 1992), isto é: o método de mínimos quadrados ordinários. Utiliza-se uma janela de dias passados da qual se recolhe o retorno do fundo em questão e o retorno dos fatores selecionados para a análise, *in sample*. Com base nestes, o programa otimiza a soma dos resíduos ao quadrado para o seu valor mínimo através dos coeficientes da regressão. Estes coeficientes são então multiplicados pelos retornos dos fatores na data seguinte e assim é estimado o retorno para o dia seguinte. Isto é:

Seja o retorno de um fundo  $i$  no momento  $t$  representado por:

$$r_{it} = \beta_{it}R_t + u_t$$

Onde  $R_t \in R^{1 \times j}$  é um vetor contendo os retornos dos  $j$  fatores<sup>1</sup> no instante  $t$  e  $u_t \sim N(0, \sigma_t^2)$  é um ruído.

Segue que

$$r_{it} = \widehat{\beta}_{it}R_t + \widehat{u}_{it}$$

Onde

$$\widehat{\beta}_{it} = \operatorname{argmin}_{\beta} \sum_{\tau=t_0}^{\tau=t} \widehat{u}_{it}^2$$

Utilizando o método supracitado, estima-se a seguir a alocação de uma coleção de fundos multimercado brasileiros. Foram utilizados em todos os modelos que seguem, nesse inclusive, janelas de 20,30, 40, 50, 60 e 70 dias para estimar os resultados do dia

---

<sup>1</sup>Sendo estes fatores o futuro de S&P500 com vencimento no mês seguinte a  $t$ , o futuro de dólar com vencimento no mês seguinte a  $t$ , o Ibovespa, a ação ordinária da Petrobrás, o futuro de CDI com vencimento em janeiro de 2021, o futuro de CDI com vencimento em janeiro de 2023, o contrato futuro da FED Rate de cinco anos, o contrato futuro de libra esterlina com vencimento no mês seguinte a  $t$ , o contrato futuro de yen com vencimento no mês seguinte a  $t$ , o contrato futuro de renminbi yuan com vencimento no mês seguinte a  $t$ , o IRFM e o IMA-B. Os dados são de 04/06/2018 a 14/05/2019.



seguinte. Para critério de avaliação da qualidade das predições dos retornos fora da amostra, usamos a o erro absoluto médio (EAM). Os resultados seguem a seguir na Tabela I:

*Tabela I – Estatísticas Qualitativas do Método de MQO*

Fundos	EAM 20 dias	EAM 30 dias	EAM 40 dias	EAM 50 dias	EAM 60 dias	EAM 70 dias
GAUSSMST.BZ.Equity	3,8736E-03	3,0163E-03	2,6868E-03	2,3956E-03	2,2082E-03	1,9586E-03
HGVERDE.BZ.Equity	1,2249E-03	9,7531E-04	9,0892E-04	8,1401E-04	7,8316E-04	8,0841E-04
VMSFIMU.BZ.Equity	1,7902E-03	1,5726E-03	1,5701E-03	1,5626E-03	1,5653E-03	1,5501E-03
ADMACRO.BZ.Equity	2,0506E-03	1,4446E-03	1,3055E-03	1,3375E-03	1,3061E-03	1,3060E-03
BR1908E.BZ.Equity	1,6193E-03	1,2907E-03	1,3055E-03	1,3726E-03	1,5508E-03	1,5985E-03
XTRAFI.BZ.Equity	1,3848E-03	1,1780E-03	1,1309E-03	1,0952E-03	1,0682E-03	1,0972E-03
SPXNIMI.BZ.Equity	2,3975E-03	1,9695E-03	1,8840E-03	1,9270E-03	1,9314E-03	1,9744E-03
KPZETAM.BZ.Equity	4,1531E-03	3,3843E-03	3,2093E-03	3,4800E-03	3,3713E-03	3,3761E-03
KAPIKAP.BZ.Equity	2,1009E-03	1,6641E-03	1,6212E-03	1,6981E-03	1,6164E-03	1,6274E-03
VISTMUL.BZ.Equity	9,6315E-03	7,5561E-03	7,1618E-03	7,3735E-03	6,8797E-03	6,6892E-03
ABSVRTX.BZ.Equity	1,9655E-03	1,6955E-03	1,7079E-03	1,5821E-03	1,5478E-03	1,5372E-03
VNTMCMS.BZ.Equity	2,8674E-03	2,3200E-03	2,0930E-03	2,0781E-03	1,9985E-03	1,9654E-03
MAUMSTR.BZ.Equity	3,6147E-03	2,8765E-03	2,9688E-03	2,8316E-03	2,7002E-03	2,6461E-03

Pode-se observar que conforme a janela de dias aumenta neste caso, os EAM de todos os fundos diminuem. Isso pode ser justificado pelo fato de o MQO ser o melhor estimador linear não-viesado, portanto, ao aumentar o número de observações mantendo um número fixo de variáveis explicativas, a variância dos estimadores diminuí.

O modelo é, no entanto, passível de duas críticas acerca de sua robustez. A primeira é: Por que o modelo assume que todas as observações têm igual valor? É natural imaginar que o cenário que os gestores desses fundos encontraram no início da amostra pode em muito diferir daqueles mais na ponta, podendo inclusive a estratégia mudar completamente dentro da janela. Portanto, para fazer a previsão da alocação e  $t$ , deveria haver mais peso para as observações mais recentes. Essa crítica será avaliada no capítulo seguinte, onde utilizaremos o modelo de Mínimos Quadrados Ponderados para tentar resolver esta questão. A segunda crítica é de caráter técnico. Sabe-se que conforme se aumenta o número de fatores  $j$ , menos precisa torna-se a estimação dos coeficientes, podendo inclusive gerar correlações espúrias no modelo. Portanto, iremos comparar este resultado e o do modelo seguinte, com os do modelo produzido pelo *Elastic Net*, desenvolvido no Capítulo 6. A nossa hipótese é que os betas gerados

pela seleção de modelo do algoritmo, irá diminuir significativamente as estatísticas referentes a erros fora da amostra.

## 5. O Método de Mínimos Quadrados Ponderados

Conforme foi exposto no capítulo anterior, tentar estimar alocação dos fundos multimercado com base no método de MQO apresenta potenciais problemas à robustez da sua estimação. São elas:

1. A indistinção no peso das observações mais recentes *vis-à-vis* observações mais antigas, o que implica na hipótese que os gestores mantêm sua alocação relativamente estável durante o período usado para a estimação.
2. Fatores que possam apresentar correlação espúria com o retorno do fundo, prejudicando a precisão dos estimadores.

Numa tentativa de resolver o problema 1, utilizamos o Método de Mínimos Quadrados Ponderados (MQP), dando um maior peso às observações mais recentes. Com isso, espera-se permitir que os erros mais recentes sejam penalizados de forma mais severa que erros mais antigos. Isto é, mantendo-se a notação:

Seja  $\mathbf{W}$  uma função tal que:

$$\mathbf{W}: (t, \lambda) \rightarrow \mathbb{R}, W(t, \lambda) = e^{-\lambda t}, \text{ com } \lambda > 0$$

$$(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{it}, \lambda^*) = \underset{\tau=t_0}{\operatorname{argmin}} \sum_{\tau=t_0}^{\tau=t} W(t, \lambda^*)^{-1} \hat{u}_{it}^2$$

A principal preocupação a se ter em mente neste caso é que na presença de observações *outliers*, o modelo pode gerar um viés indesejado no estimador, prejudicando a estimação. São utilizadas, para fins de comparação entre modelos, as mesmas estatísticas utilizadas na avaliação do MQO para averiguar qualidade preditiva do método proposto nesse capítulo. Os resultados são apresentados a seguir na Tabela II:

*Tabela II – Estatísticas Qualitativas do Método de MQP*

Fundos	EAM 20 dias	EAM 30 dias	EAM 40 dias	EAM 50 dias	EAM 60 dias	EAM 70 dias
GAUSSMST.BZ.Equity	3,8703E-03	3,0130E-03	2,6922E-03	2,3954E-03	2,2214E-03	2,0080E-03
HGVERDE.BZ.Equity	1,2247E-03	9,7508E-04	9,1634E-04	8,1693E-04	7,8822E-04	8,1630E-04
VMSFIMU.BZ.Equity	1,7956E-03	1,5761E-03	1,5810E-03	1,5776E-03	1,5981E-03	1,5809E-03
ADMACRO.BZ.Equity	2,0477E-03	1,4503E-03	1,3120E-03	1,3459E-03	1,3085E-03	1,3115E-03
BR1908E.BZ.Equity	1,6203E-03	1,2951E-03	1,3142E-03	1,3833E-03	1,5687E-03	1,6220E-03
XTRAFI.BZ.Equity	1,3859E-03	1,1804E-03	1,1413E-03	1,0980E-03	1,0782E-03	1,1115E-03
SPXNIMI.BZ.Equity	2,3959E-03	1,9745E-03	1,8900E-03	1,9474E-03	1,9480E-03	1,9914E-03
KPZETAM.BZ.Equity	4,1592E-03	3,3918E-03	3,2343E-03	3,5311E-03	3,4274E-03	3,4311E-03
KAPIKAP.BZ.Equity	2,0994E-03	1,6674E-03	1,6242E-03	1,7194E-03	1,6375E-03	1,6564E-03
VISTMUL.BZ.Equity	9,6377E-03	7,5396E-03	7,1845E-03	7,4074E-03	6,8471E-03	6,6841E-03
ABSVRTX.BZ.Equity	1,9718E-03	1,7074E-03	1,7320E-03	1,6020E-03	1,5612E-03	1,5496E-03
VNTMCMS.BZ.Equity	2,8737E-03	2,3204E-03	2,0884E-03	2,0798E-03	1,9969E-03	1,9899E-03
MAUMSTR.BZ.Equity	3,6127E-03	2,8751E-03	3,0023E-03	2,8482E-03	2,7192E-03	2,7423E-03

Os resultados obtidos através do método de MQP é visto em comparação aos seus pares calculados no Capítulo IV. O resultado parece ser superior em alguns casos às estimações feitas em MQO para as janelas mais curtasna maioria dos casos, porém o resultado é claramente inferior para as janelas mais longas.

Conforme antecipado anteriormente neste capítulo, pode ser justificável que esse resultado ruim das janelas mais longas possa ser explicado pela existência de um viés nos coeficientes estimados. Não é possível testar, no entanto, se o viés se dá especificamente em função da interação entre pesos e *outliers* ou eventuais variáveis omitidas, mas podemos definitivamente atestar sua existência.

Para verificar isto, vamos testar a hipótese nula  $H_0$  de se  $E(\hat{u}_{it}) = 0$  vis-à-vis a hipótese alternativa  $H_1 E(\hat{u}_{it}) \neq 0$  para diferentes níveis de significância. Seguem os resultados abaixo na Tabela III:

*Tabela III: Teste para esperança dos resíduos da regressão em Mínimos Quadrados Ponderados*

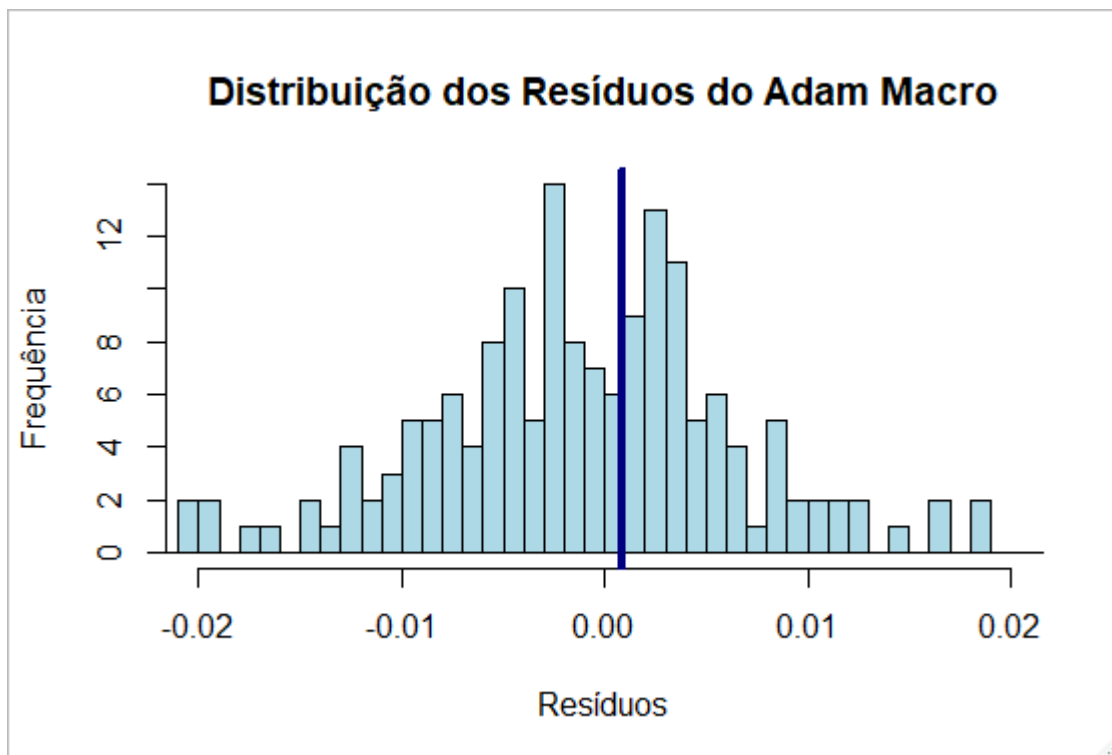
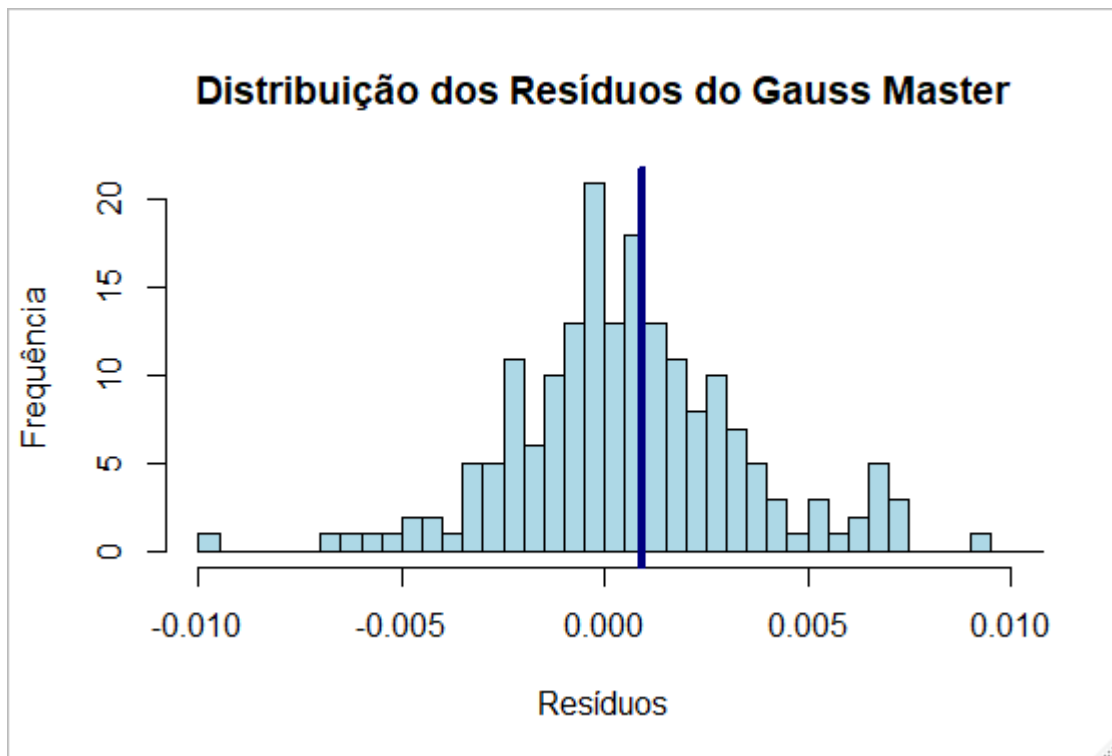
<i>P-valor:</i>	<b>40 dias</b>	<b>50 dias</b>	<b>60 dias</b>	<b>70 dias</b>
<b>GAUSSMST.BZ.Equity</b>	0,11% ***	0,014% ***	0,08% ***	0,055% ***
<b>HGVERDE.BZ.Equity</b>	4,93% *	6,180%	20,94%	37,73%
<b>VMSFIMU.BZ.Equity</b>	51,64%	60,73%	38,99%	21,46%
<b>ADMACRO.BZ.Equity</b>	5,01%	22,63%	4,76% *	0,59% **
<b>BR1908E.BZ.Equity</b>	4,22% *	2,14% *	2,33% *	2,11% *
<b>XTRAFI.BZ.Equity</b>	2,93% *	3,55% *	1,43% *	1,57% *
<b>SPXNIMI.BZ.Equity</b>	24,99%	36,65%	28,25%	54,26%
<b>KPZETAM.BZ.Equity</b>	59,47%	57,56%	35,20%	36,79%
<b>KAPIKAP.BZ.Equity</b>	67,85%	63,50%	42,32%	43,07%
<b>VISTMUL.BZ.Equity</b>	17,46%	35,34%	46,83%	32,76%
<b>ABSVRTX.BZ.Equity</b>	64,19%	71,85%	83,47%	97,97%
<b>VNTMCMS.BZ.Equity</b>	38,36%	45,24%	82,34%	63,03%
<b>MAUMSTR.BZ.Equity</b>	25,08%	36,04%	45,04%	57,60%

*Tal que: \* <5%, \*\* < 1%, \*\*\* < 0,5%*

Tendo observado os fatos supracitados, conclui-se que o ganho informacional nas previsões de alocação dos fundos provocado pela ponderação mais relevantes de observações mais recentes em comparação com seus pares produzidos pelo método de MQO não se dá de forma monotônica através das janelas selecionadas. Ainda assim, para as janelas mais curtas, o método apresentou erros significativamente menores para a maioria dos fundos.

Por razão complementar, foi colocado na página seguinte uma série de histogramas de fundos para os quais o teste supracitado teve sua hipótese nula rejeitada aos níveis de 0,5% e 1%.

*Figura I – Histograma dos resíduos dos retornos em MQP*



## 6. O Método de *Elastic Net*

Este modelo é o primeiro a introduzir as técnicas de *shrinkage selection* para o processo de replicação. Existe especial interesse nesses atributos do modelo pois desta forma é possível eliminar variáveis com baixo poder explicativo, e potencializar os ganhos de eficiência dos estimadores da alocação nos fatores.

Conforme antecipado na seção de revisão bibliográfica, e mantendo-se a notação utilizada previamente, os estimadores do método de *elastic nets* são obtidos conforme o processo seguinte:

$$\hat{\beta} = \operatorname{argmin} \frac{\sum_i^N (y_i - \sum_{j=1}^J \mathbf{x}^i \beta_j)^2}{2n} + \lambda \left( \alpha \sum_{j=1}^J |\beta_j| \mathbf{x}^i + \frac{(1-\alpha)}{2} \sum_{j=1}^J \beta_j^2 \mathbf{x}^i \right)$$

Note que o método combina as penalidades do Lasso com a penalidade de uma *ridgeregression*, balanceando-as através do termo  $\alpha$ , i.e: quando  $\alpha = 1$ , temos o lasso, quando  $\alpha = 0$ , temos a *ridgeregression*. Isto pode ser claramente ilustrado pela Figura II abaixo, que exemplifica um caso de três coeficientes:

Figura II- A combinação entre Lasso e RidgeRegression

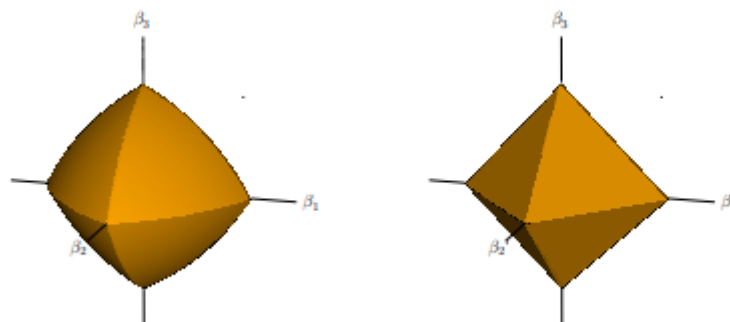


Figura 2- Extraído de *Statistical learning With Sparsity The Lasso and Generalizations*, de Trevor Hastie, Robert Tibshirani e Martin Wainwright (2015): à esquerda, as constraints do Lasso, e à direita, as constraints do Elastic Net para uma alfa = 0,7

Calcula-se então a combinação  $(\beta, \alpha, \lambda)$  que melhor descreve o processo dentro de uma janela *insample*. As janelas utilizadas serão as mesmas do restante do trabalho e o critério para a qualidade da predição também. Os resultados são postos a seguir:

*Tabela III- Estatísticas Qualitativas para o Método de Elastic Net*

Fundos	EAM 20 dias	EAM 30 dias	EAM 40 dias	EAM 50 dias	EAM 60 dias	EAM 70 dias
GAUSSMST BZ Equity	1,5714E-03	1,8353E-03	1,9487E-03	1,8747E-03	1,9099E-03	1,7047E-03
HGVERDE BZ Equity	5,4959E-04	6,1939E-04	6,4043E-04	6,3724E-04	6,1742E-04	6,6266E-04
VMSFIMU BZ Equity	8,3668E-04	9,7423E-04	1,1044E-03	1,1772E-03	1,2434E-03	1,2660E-03
ADMACRO BZ Equity	8,5596E-04	9,2042E-04	9,6992E-04	1,0210E-03	1,0562E-03	1,0749E-03
BR1908E BZ Equity	6,6001E-04	7,7817E-04	9,1422E-04	1,0299E-03	1,2034E-03	1,2976E-03
XTRAFI BZ Equity	5,7204E-04	7,0569E-04	7,9112E-04	8,5121E-04	8,7654E-04	9,0441E-04
SPXNIMI BZ Equity	9,2528E-04	1,1498E-03	1,3123E-03	1,4565E-03	1,4996E-03	1,6282E-03
KPZETAM BZ Equity	1,7496E-03	1,9884E-03	2,2744E-03	2,6371E-03	2,7612E-03	2,8646E-03
KAPIKAP BZ Equity	8,0367E-04	9,6904E-04	1,1132E-03	1,2669E-03	1,3097E-03	1,3792E-03
VISTMUL BZ Equity	4,1862E-03	4,9890E-03	5,0697E-03	5,5272E-03	5,8740E-03	5,3555E-03
ABSVRTX BZ Equity	8,1728E-04	1,0310E-03	1,1838E-03	1,2049E-03	1,2058E-03	1,2416E-03
VNTMCMS BZ Equity	1,2056E-03	1,3481E-03	1,4792E-03	1,5404E-03	1,6174E-03	1,6123E-03
MAUMSTR BZ Equity	1,4371E-03	1,7942E-03	2,0587E-03	2,1316E-03	2,1886E-03	2,1991E-03

Conforme está evidenciado acima, o método de Elastic Net supera os outros métodos aqui apresentados. A seleção de modelo combinada ao *shrinkage* permite ganhos na eficiência do estimador. Considerando a amostra aqui estudada, os EAM dos resultados de previsão do Elastic Net foram em média 64,65% menores que os dos métodos de MQO e MQP combinados. Ademais, nesta mesma tabela pode-se observar que a janela de 20 dias é a que produz o menor EAM na maioria dos casos.



## 7. *RandomWalk*

O modelo de *randomwalk* pode ser descrito como

$$r_{i,t} = \alpha_{i,t} + \beta_{i,t}r_{i,t-1} + u_{i,t}$$

Ou seja, o modelo não faz qualquer inferência sobre a alocação do fundo, apenas tenta prever o seu retorno com base no retorno passado. Sua acurácia é relativamente boa, em especial pelo número elevado de graus de liberdade que a estimação ganha tendo apenas uma variável explicativa. Portanto, este será usado como um *benchmark* para as previsões executadas pelos demais modelos.

Os resultados obtidos estão apresentados na tabela a seguir:

*Tabela IV- Estatísticas Qualitativas para o Método de RandomWalk*

	<b>EAM 20 dias</b>	<b>EAM 30 dias</b>	<b>EAM 40 dias</b>	<b>EAM 50 dias</b>	<b>EAM 60 dias</b>	<b>EAM 70 dias</b>
<b>GAUSSMST BZ Equity</b>	3,4293E-03	3,1555E-03	3,0498E-03	2,8083E-03	2,6059E-03	2,4491E-03
<b>HGVERDE BZ Equity</b>	2,1018E-03	2,0165E-03	1,9181E-03	1,7954E-03	1,6546E-03	1,5463E-03
<b>VMSFIMU BZ Equity</b>	3,0973E-03	2,9939E-03	2,9373E-03	2,7482E-03	2,5657E-03	2,4093E-03
<b>ADMACRO BZ Equity</b>	1,5409E-03	1,4205E-03	1,2919E-03	1,2296E-03	1,1393E-03	1,0987E-03
<b>BR1908E BZ Equity</b>	1,6047E-03	1,4725E-03	1,4168E-03	1,3455E-03	1,2776E-03	1,1137E-03
<b>XTRAFI BZ Equity</b>	1,5281E-03	1,4761E-03	1,4356E-03	1,3906E-03	1,3574E-03	1,3250E-03
<b>SPXNIMI BZ Equity</b>	2,0100E-03	1,8935E-03	1,8112E-03	1,7169E-03	1,6037E-03	1,4605E-03
<b>KPZETAM BZ Equity</b>	4,5271E-03	4,3484E-03	4,1926E-03	4,0335E-03	3,8995E-03	3,7340E-03
<b>KAPIKAP BZ Equity</b>	2,1802E-03	2,0884E-03	2,0321E-03	1,9616E-03	1,8867E-03	1,8068E-03
<b>VISTMUL BZ Equity</b>	8,1025E-03	7,6303E-03	7,2638E-03	7,0015E-03	6,6588E-03	6,1603E-03
<b>ABSVRTX BZ Equity</b>	2,4938E-03	2,2999E-03	2,1698E-03	2,0142E-03	1,8912E-03	1,7638E-03
<b>VNTMCMS BZ Equity</b>	2,5385E-03	2,3922E-03	2,3400E-03	2,1869E-03	2,0298E-03	1,8998E-03
<b>MAUMSTR BZ Equity</b>	2,9446E-03	2,8434E-03	2,7590E-03	2,6946E-03	2,5472E-03	2,4131E-03

Podemos observar que especialmente os modelos que os modelos de MQO e MQP que usam pequenas janelas de observação *in sample* falham em superar a acurácia de *randomwalk*, porém o modelo de *elastic net* o supera para qualquer um dos fundos em qualquer janela *in sample* testada neste trabalho. Na tabela a seguir são apresentadas as diferenças entre os EAM do modelo de *randomwalk* e os demais propostos. Para facilitar a visualização, foram destacados em verde os resultados superiores, e em vermelho os inferiores:

*Tabela V- Diferenças entre o randomwalk e demais modelos apresentados*

	Elastic Net					
	EAM 20 dias	EAM 30 dias	EAM 40 dias	EAM 50 dias	EAM 60 dias	EAM 70 dias
GAUSSMST BZ Equity	-1,9905E-03	-1,5526E-03	-1,4300E-03	-1,3229E-03	-1,1612E-03	-1,2273E-03
HGVERDE BZ Equity	-1,5943E-03	-1,4709E-03	-1,3789E-03	-1,2840E-03	-1,1856E-03	-1,0713E-03
VMSFIMU BZ Equity	-2,3279E-03	-2,1357E-03	-2,0115E-03	-1,8074E-03	-1,6252E-03	-1,5058E-03
ADMACRO BZ Equity	-7,5389E-04	-6,1318E-04	-4,8224E-04	-4,1709E-04	-3,4036E-04	-3,3157E-04
BR1908E BZ Equity	-9,9780E-04	-7,8991E-04	-6,5037E-04	-5,1901E-04	-3,6340E-04	-1,7968E-04
XTRAFI BZ Equity	-1,0021E-03	-8,5710E-04	-7,7524E-04	-7,0748E-04	-6,8862E-04	-6,7394E-04
SPXNIMI BZ Equity	-1,1592E-03	-8,8499E-04	-7,1576E-04	-5,6280E-04	-4,7898E-04	-3,0344E-04
KPZETAM BZ Equity	-2,9115E-03	-2,5969E-03	-2,2859E-03	-1,9261E-03	-1,8020E-03	-1,6808E-03
KAPIKAP BZ Equity	-1,4413E-03	-1,2385E-03	-1,1028E-03	-9,4910E-04	-8,9181E-04	-8,1828E-04
VISTMUL BZ Equity	-4,2696E-03	-3,2728E-03	-3,0318E-03	-2,6032E-03	-2,2346E-03	-2,3382E-03
ABSVRTX BZ Equity	-1,7423E-03	-1,3955E-03	-1,1817E-03	-1,0554E-03	-9,8305E-04	-8,8149E-04
VNTMCMS BZ Equity	-1,4252E-03	-1,1996E-03	-1,0947E-03	-9,4531E-04	-7,9049E-04	-7,3416E-04
MAUMSTR BZ Equity	-1,6062E-03	-1,2494E-03	-1,0033E-03	-9,3864E-04	-8,4069E-04	-7,8812E-04
	MQO					
	EAM 20 dias	EAM 30 dias	EAM 40 dias	EAM 50 dias	EAM 60 dias	EAM 70 dias
GAUSSMST BZ Equity	1,1743E-04	-5,2101E-04	-8,1645E-04	-9,1809E-04	-9,4265E-04	-1,0513E-03
HGVERDE BZ Equity	-9,7068E-04	-1,1574E-03	-1,1529E-03	-1,1449E-03	-1,0622E-03	-9,6932E-04
VMSFIMU BZ Equity	-1,4512E-03	-1,6086E-03	-1,6211E-03	-1,5047E-03	-1,3868E-03	-1,3077E-03
ADMACRO BZ Equity	3,4453E-04	-1,5339E-04	-2,0211E-04	-1,6977E-04	-1,5549E-04	-1,7061E-04
BR1908E BZ Equity	-1,1573E-04	-3,4040E-04	-3,2233E-04	-2,4865E-04	-1,0453E-04	3,2001E-05
XTRAFI BZ Equity	-2,5481E-04	-4,4287E-04	-4,9158E-04	-5,1544E-04	-5,4590E-04	-5,3857E-04
SPXNIMI BZ Equity	1,8525E-04	-1,7329E-04	-2,4518E-04	-1,9643E-04	-1,6123E-04	-6,3364E-05
KPZETAM BZ Equity	-6,9208E-04	-1,3674E-03	-1,5022E-03	-1,2643E-03	-1,3494E-03	-1,3246E-03
KAPIKAP BZ Equity	-2,4850E-04	-6,2887E-04	-6,7883E-04	-6,1030E-04	-6,6409E-04	-6,4531E-04
VISTMUL BZ Equity	7,1619E-04	-1,0306E-03	-1,2855E-03	-1,1589E-03	-1,4990E-03	-1,3864E-03
ABSVRTX BZ Equity	-6,8653E-04	-8,1271E-04	-7,4417E-04	-7,6060E-04	-7,3034E-04	-6,7604E-04
VNTMCMS BZ Equity	1,0928E-04	-3,3989E-04	-5,7037E-04	-5,1190E-04	-5,0506E-04	-4,8503E-04
MAUMSTR BZ Equity	4,2185E-04	-2,8783E-04	-2,2709E-04	-3,7219E-04	-4,5100E-04	-4,6640E-04
	MQP					
	EAM 20 dias	EAM 30 dias	EAM 40 dias	EAM 50 dias	EAM 60 dias	EAM 70 dias
GAUSSMST BZ Equity	1,1441E-04	-5,2393E-04	-8,1203E-04	-9,1828E-04	-9,3275E-04	-1,0160E-03
HGVERDE BZ Equity	-9,7091E-04	-1,1576E-03	-1,1466E-03	-1,1425E-03	-1,0584E-03	-9,6370E-04
VMSFIMU BZ Equity	-1,4462E-03	-1,6056E-03	-1,6120E-03	-1,4928E-03	-1,3621E-03	-1,2858E-03
ADMACRO BZ Equity	3,4191E-04	-1,4846E-04	-1,9667E-04	-1,6308E-04	-1,5368E-04	-1,6669E-04
BR1908E BZ Equity	-1,1483E-04	-3,3647E-04	-3,1508E-04	-2,4010E-04	-9,1037E-05	4,8862E-05
XTRAFI BZ Equity	-2,5373E-04	-4,4077E-04	-4,8294E-04	-5,1319E-04	-5,3831E-04	-5,2833E-04
SPXNIMI BZ Equity	1,8375E-04	-1,6894E-04	-2,4019E-04	-1,8034E-04	-1,4885E-04	-5,1315E-05
KPZETAM BZ Equity	-6,8648E-04	-1,3608E-03	-1,4812E-03	-1,2237E-03	-1,3070E-03	-1,2853E-03
KAPIKAP BZ Equity	-2,4986E-04	-6,2597E-04	-6,7629E-04	-5,9334E-04	-6,4810E-04	-6,2462E-04
VISTMUL BZ Equity	7,2193E-04	-1,0450E-03	-1,2665E-03	-1,1321E-03	-1,5235E-03	-1,3900E-03
ABSVRTX BZ Equity	-6,8075E-04	-8,0224E-04	-7,2402E-04	-7,4478E-04	-7,2036E-04	-6,6722E-04
VNTMCMS BZ Equity	1,1502E-04	-3,3952E-04	-5,7427E-04	-5,1055E-04	-5,0625E-04	-4,6741E-04
MAUMSTR BZ Equity	4,1999E-04	-2,8908E-04	-1,9852E-04	-3,5858E-04	-4,3623E-04	-3,9565E-04

## 8. Considerações

O objetivo deste trabalho é determinar o melhor método para determinar a alocação de fundos multimercado usando a acurácia da predição do retorno deste fundo face o retorno de fato realizado. Para tanto, nos últimos capítulos foram expostos diferentes métodos que geraram variados resultados, que agora serão definitivamente comparados, e com base nisso será possível prosseguir para uma conclusão.

Mantendo-se fixa a janela de tempo, conclui-se que para qualquer uma das janelas selecionadas, o *elastic net* ganha de todos os demais modelos aqui testados.

*Tabela V- Comparação entre janelas*

20 dias	<u>RW</u>	<u>Elastic Net</u>	<u>OLS</u>	<u>WLS</u>
<b>GAUSSMST BZ Equity</b>	3,4293E-03	<b>1,4388E-03</b>	3,5467E-03	3,5437E-03
<b>HGVERDE BZ Equity</b>	2,1018E-03	<b>5,0749E-04</b>	1,1311E-03	1,1309E-03
<b>VMSFIMU BZ Equity</b>	3,0973E-03	<b>7,6932E-04</b>	1,6460E-03	1,6511E-03
<b>ADMACRO BZ Equity</b>	1,5409E-03	<b>7,8705E-04</b>	1,8855E-03	1,8829E-03
<b>BR1908E BZ Equity</b>	1,6047E-03	<b>6,0687E-04</b>	1,4889E-03	1,4898E-03
<b>XTRAFI BZ Equity</b>	1,5281E-03	<b>5,2598E-04</b>	1,2733E-03	1,2744E-03
<b>SPXNIMI BZ Equity</b>	2,0100E-03	<b>8,5079E-04</b>	2,1952E-03	2,1937E-03
<b>KPZETAM BZ Equity</b>	4,5271E-03	<b>1,6156E-03</b>	3,8350E-03	3,8406E-03
<b>KAPIKAP BZ Equity</b>	2,1802E-03	<b>7,3896E-04</b>	1,9317E-03	1,9304E-03
<b>VISTMUL BZ Equity</b>	8,1025E-03	<b>3,8329E-03</b>	8,8187E-03	8,8244E-03
<b>ABSVRTX BZ Equity</b>	2,4938E-03	<b>7,5148E-04</b>	1,8073E-03	1,8131E-03
<b>VNTMCMS BZ Equity</b>	2,5385E-03	<b>1,1133E-03</b>	2,6478E-03	2,6535E-03
<b>MAUMSTR BZ Equity</b>	2,9446E-03	<b>1,3384E-03</b>	3,3665E-03	3,3646E-03

30 dias	<u>RW</u>	<u>Elastic Net</u>	<u>OLS</u>	<u>WLS</u>
<b>GAUSSMST BZ Equity</b>	3,1555E-03	<b>1,6029E-03</b>	2,6345E-03	2,6316E-03
<b>HGVERDE BZ Equity</b>	2,0165E-03	<b>5,4559E-04</b>	8,5910E-04	8,5890E-04
<b>VMSFIMU BZ Equity</b>	2,9939E-03	<b>8,5815E-04</b>	1,3853E-03	1,3883E-03
<b>ADMACRO BZ Equity</b>	1,4205E-03	<b>8,0732E-04</b>	1,2671E-03	1,2720E-03
<b>BR1908E BZ Equity</b>	1,4725E-03	<b>6,8255E-04</b>	1,1321E-03	1,1360E-03
<b>XTRAFI BZ Equity</b>	1,4761E-03	<b>6,1898E-04</b>	1,0332E-03	1,0353E-03
<b>SPXNIMI BZ Equity</b>	1,8935E-03	<b>1,0085E-03</b>	1,7202E-03	1,7245E-03
<b>KPZETAM BZ Equity</b>	4,3484E-03	<b>1,7515E-03</b>	2,9810E-03	2,9876E-03
<b>KAPIKAP BZ Equity</b>	2,0884E-03	<b>8,4996E-04</b>	1,4596E-03	1,4625E-03
<b>VISTMUL BZ Equity</b>	7,6303E-03	<b>4,3575E-03</b>	6,5996E-03	6,5852E-03
<b>ABSVRTX BZ Equity</b>	2,2999E-03	<b>9,0434E-04</b>	1,4872E-03	1,4976E-03
<b>VNTMCMS BZ Equity</b>	2,3922E-03	<b>1,1925E-03</b>	2,0523E-03	2,0527E-03
<b>MAUMSTR BZ Equity</b>	2,8434E-03	<b>1,5940E-03</b>	2,5555E-03	2,5543E-03

40 dias	<u>RW</u>	<u>Elastic Net</u>	<u>OLS</u>	<u>WLS</u>
<b>GAUSSMST BZ Equity</b>	3,0498E-03	<b>1,6198E-03</b>	2,2334E-03	2,2378E-03
<b>HGVERDE BZ Equity</b>	1,9181E-03	<b>5,3917E-04</b>	7,6520E-04	7,7145E-04
<b>VMSFIMU BZ Equity</b>	2,9373E-03	<b>9,2585E-04</b>	1,3162E-03	1,3254E-03
<b>ADMACRO BZ Equity</b>	1,2919E-03	<b>8,0963E-04</b>	1,0898E-03	1,0952E-03
<b>BR1908E BZ Equity</b>	1,4168E-03	<b>7,6639E-04</b>	1,0944E-03	1,1017E-03
<b>XTRAFI BZ Equity</b>	1,4356E-03	<b>6,6038E-04</b>	9,4404E-04	9,5269E-04
<b>SPXNIMI BZ Equity</b>	1,8112E-03	<b>1,0954E-03</b>	1,5660E-03	1,5710E-03
<b>KPZETAM BZ Equity</b>	4,1926E-03	<b>1,9067E-03</b>	2,6904E-03	2,7113E-03
<b>KAPIKAP BZ Equity</b>	2,0321E-03	<b>9,2928E-04</b>	1,3533E-03	1,3558E-03
<b>VISTMUL BZ Equity</b>	7,2638E-03	<b>4,2319E-03</b>	5,9783E-03	5,9972E-03
<b>ABSVRTX BZ Equity</b>	2,1698E-03	<b>9,8818E-04</b>	1,4257E-03	1,4458E-03
<b>VNTMCMS BZ Equity</b>	2,3400E-03	<b>1,2453E-03</b>	1,7696E-03	1,7657E-03
<b>MAUMSTR BZ Equity</b>	2,7590E-03	<b>1,7557E-03</b>	2,5319E-03	2,5604E-03

50 dias	<u>RW</u>	<u>Elastic Net</u>	<u>OLS</u>	<u>WLS</u>
<b>GAUSSMST BZ Equity</b>	2,8083E-03	<b>1,4854E-03</b>	1,8902E-03	1,8900E-03
<b>HGVERDE BZ Equity</b>	1,7954E-03	<b>5,1143E-04</b>	6,5052E-04	6,5284E-04
<b>VMSFIMU BZ Equity</b>	2,7482E-03	<b>9,4075E-04</b>	1,2435E-03	1,2553E-03
<b>ADMACRO BZ Equity</b>	1,2296E-03	<b>8,1248E-04</b>	1,0598E-03	1,0665E-03
<b>BR1908E BZ Equity</b>	1,3455E-03	<b>8,2654E-04</b>	1,0969E-03	1,1054E-03
<b>XTRAFI BZ Equity</b>	1,3906E-03	<b>6,8316E-04</b>	8,7521E-04	8,7745E-04
<b>SPXNIMI BZ Equity</b>	1,7169E-03	<b>1,1541E-03</b>	1,5205E-03	1,5366E-03
<b>KPZETAM BZ Equity</b>	4,0335E-03	<b>2,1074E-03</b>	2,7692E-03	2,8098E-03
<b>KAPIKAP BZ Equity</b>	1,9616E-03	<b>1,0125E-03</b>	1,3513E-03	1,3682E-03
<b>VISTMUL BZ Equity</b>	7,0015E-03	<b>4,3982E-03</b>	5,8426E-03	5,8694E-03
<b>ABSVRTX BZ Equity</b>	2,0142E-03	<b>9,5881E-04</b>	1,2536E-03	1,2694E-03
<b>VNTMCMS BZ Equity</b>	2,1869E-03	<b>1,2416E-03</b>	1,6750E-03	1,6764E-03
<b>MAUMSTR BZ Equity</b>	2,6946E-03	<b>1,7559E-03</b>	2,3224E-03	2,3360E-03

60 dias	<u>RW</u>	<u>Elastic Net</u>	<u>OLS</u>	<u>WLS</u>
<b>GAUSSMST BZ Equity</b>	2,6059E-03	<b>1,4446E-03</b>	1,6632E-03	1,6731E-03
<b>HGVERDE BZ Equity</b>	1,6546E-03	<b>4,6902E-04</b>	5,9239E-04	5,9622E-04
<b>VMSFIMU BZ Equity</b>	2,5657E-03	<b>9,4053E-04</b>	1,1789E-03	1,2037E-03
<b>ADMACRO BZ Equity</b>	1,1393E-03	<b>7,9890E-04</b>	9,8377E-04	9,8558E-04
<b>BR1908E BZ Equity</b>	1,2776E-03	<b>9,1420E-04</b>	1,1731E-03	1,1866E-03
<b>XTRAFI BZ Equity</b>	1,3574E-03	<b>6,6874E-04</b>	8,1146E-04	8,1905E-04
<b>SPXNIMI BZ Equity</b>	1,6037E-03	<b>1,1247E-03</b>	1,4425E-03	1,4548E-03
<b>KPZETAM BZ Equity</b>	3,8995E-03	<b>2,0975E-03</b>	2,5501E-03	2,5925E-03
<b>KAPIKAP BZ Equity</b>	1,8867E-03	<b>9,9493E-04</b>	1,2227E-03	1,2386E-03
<b>VISTMUL BZ Equity</b>	6,6588E-03	<b>4,4242E-03</b>	5,1598E-03	5,1353E-03
<b>ABSVRTX BZ Equity</b>	1,8912E-03	<b>9,0817E-04</b>	1,1609E-03	1,1709E-03
<b>VNTMCMS BZ Equity</b>	2,0298E-03	<b>1,2393E-03</b>	1,5247E-03	1,5235E-03
<b>MAUMSTR BZ Equity</b>	2,5472E-03	<b>1,7065E-03</b>	2,0962E-03	2,1110E-03

70 dias	<u>RW</u>	<u>Elastic Net</u>	<u>OLS</u>	<u>WLS</u>
<b>GAUSSMST BZ Equity</b>	2,4491E-03	<b>1,2218E-03</b>	1,3978E-03	1,4331E-03
<b>HGVERDE BZ Equity</b>	1,5463E-03	<b>4,7495E-04</b>	5,7694E-04	5,8257E-04
<b>VMSFIMU BZ Equity</b>	2,4093E-03	<b>9,0349E-04</b>	1,1016E-03	1,1235E-03
<b>ADMACRO BZ Equity</b>	1,0987E-03	<b>7,6713E-04</b>	9,2810E-04	9,3202E-04
<b>BR1908E BZ Equity</b>	1,1137E-03	<b>9,3404E-04</b>	1,1457E-03	1,1626E-03
<b>XTRAFI BZ Equity</b>	1,3250E-03	<b>6,5102E-04</b>	7,8639E-04	7,9663E-04
<b>SPXNIMI BZ Equity</b>	1,4605E-03	<b>1,1570E-03</b>	1,3971E-03	1,4092E-03
<b>KPZETAM BZ Equity</b>	3,7340E-03	<b>2,0532E-03</b>	2,4094E-03	2,4487E-03
<b>KAPIKAP BZ Equity</b>	1,8068E-03	<b>9,8850E-04</b>	1,1615E-03	1,1822E-03
<b>VISTMUL BZ Equity</b>	6,1603E-03	<b>3,8221E-03</b>	4,7739E-03	4,7702E-03
<b>ABSVRTX BZ Equity</b>	1,7638E-03	<b>8,8230E-04</b>	1,0877E-03	1,0966E-03
<b>VNTMCMS BZ Equity</b>	1,8998E-03	<b>1,1656E-03</b>	1,4147E-03	1,4324E-03
<b>MAUMSTR BZ Equity</b>	2,4131E-03	<b>1,6250E-03</b>	1,9467E-03	2,0174E-03

Para determinar, portanto, o melhor conjunto de janela e modelo, basta observar qual janela que gera o melhor resultado de EAM no método *elastic net*. Observa-se que a resposta neste caso não é óbvia, mas a maioria dos fundos apresenta um melhor resultado quando é usada a janela de 20 dias, conforme exposto na tabela a seguir:

*Tabela VII- Os melhores modelos*

	<u>Melhor método</u>	<u>Tamanho da janela</u>	<u>EAM</u>	<u>Δ EAM Random Walk</u>
<b>GAUSSMST BZ Equity</b>	Elastic Net	70	1,2218E-03	-1,2273E-03
<b>HGVERDE BZ Equity</b>	Elastic Net	60	4,6902E-04	-1,1856E-03
<b>VMSFIMU BZ Equity</b>	Elastic Net	20	7,6932E-04	-2,3279E-03
<b>ADMACRO BZ Equity</b>	Elastic Net	70	7,6713E-04	-3,3157E-04
<b>BR1908E BZ Equity</b>	Elastic Net	20	6,0687E-04	-9,9780E-04
<b>XTRAFI BZ Equity</b>	Elastic Net	20	5,2598E-04	-1,0021E-03
<b>SPXNIMI BZ Equity</b>	Elastic Net	20	8,5079E-04	-1,1592E-03
<b>KPZETAM BZ Equity</b>	Elastic Net	20	1,6156E-03	-2,9115E-03
<b>KAPIKAP BZ Equity</b>	Elastic Net	20	7,3896E-04	-1,4413E-03
<b>VISTMUL BZ Equity</b>	Elastic Net	70	3,8221E-03	-2,3382E-03
<b>ABSVRTX BZ Equity</b>	Elastic Net	20	7,5148E-04	-1,7423E-03
<b>VNTMCMS BZ Equity</b>	Elastic Net	20	1,1133E-03	-1,4252E-03
<b>MAUMSTR BZ Equity</b>	Elastic Net	20	1,3384E-03	-1,6062E-03

## 9. Conclusão

Este trabalho teve por objetivo definir e aplicar técnicas econométricas que possam ajudar na decomposição do retorno dos fundos multimercado no Brasil em fatores de risco. Sua motivação é apresentar técnicas que possam melhorar a alocação eficiente dos recursos financeiros de entidades, buscando diminuir os problemas de assimetria de informação que existem entre o poupador e o investidor.

Nele foram expostos diferentes modelos que buscam replicar o retorno desses fundos e revelar uma estimativa para a sua alocação. Dentre os apresentados, o que revelou a maior acurácia foi o *elastic net*, superando inclusive os modelos de *randomwalk*. Com relação à janela mais adequada para se fazer as estimativas, não foi possível definir uma resposta definitiva, no entanto a maioria dos casos aqui estudados apontam para uma janela de 20 dias como a melhor amostra *in sample* no caso do *elastic net*, no entanto o autor prefere deixar em aberto qualquer conclusão acerca deste parâmetro já que haveria incerteza para tal conclusão no que se trata de validade externa.

O autor deste trabalho espera ter contribuído de alguma forma para a presente discussão a cerca do tema e que os resultados aqui obtidos possam ser utilizados de maneira prática pela indústria.

## 10. Bibliografia

- Pizzinga, A. (2006). State Space Models for Dynamic Style. *Brazilian Review of Econometrics*, 31-66.
- Pizzinga, A. (2010). Constrained Kalman Filtering: Additional Results. *International Statistical Review*, 189-208.
- Robert Tibshirani, T. H. (2015). Statistical Learning with Sparsity: The Lasso and Generalizations. Em T. H. Robert Tibshirani, *Statistical Learning with Sparsity: The Lasso and Generalizations* (p. 58). Stanford: CRC Press.
- Sharpe, W. (Winter de 1992). Asset Allocation: Management Style and Performance Measurement. *Journal of Portfolio Management*, pp. 7-19.
- Tibshirani, R. (1996). Regression Shrinkage and Selection via the Lasso. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B* , pp. 267-288.
- Zou, H. (2006). The Adaptive Lasso and Its Oracle Properties. *Journal of the American Statistical Association*, pp. 1418-1429.