CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

ECO 1113 TEORIA MICROECONÔMICA I

PROFESSOR: JULIANO ASSUNÇÃO TURMA: 2JA

Escolha - Gabarito

2019

Questão 1:

Resolva os seguintes problemas de maximização sujeita a uma restrição (ou seja, monte o Lagrangeano, ache as condições de primeira ordem e encontre os valores ótimos das variáveis de escolha):

(a) Maximize $z = xy$ sujeito a $x + 2y = 2$

(b) Maximize $z = x(y + 4)$ sujeito a $x + y = 8$

(c) Maximize $z = x + y^2$ sujeito a $x + y = 6$

R:

a) max xy s.a $x + 2y = 2$

$$\mathscr{L} = xy + \lambda(x + 2y - 2)$$

CPOs:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = y + \lambda = 0 \quad (1) \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x + 2y - 2 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = x + 2\lambda = 0 \quad (2)$$

De (1) e (2) temos que $x - 2y = 0$ e usando (3) temos que $x = 1$ e $y = 1/2$.

b) max $x(y + 4)$ s.a $x + y = 8$

$$\mathscr{L} = x(y + 4) + \lambda(x + y - 8)$$

CPOs:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = y + 4 + \lambda = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = x + \lambda = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x + y - 8 = 0 \quad (6)$$

Por (5) temos que $\lambda = -x$, substituindo em (4) temos que $x - y = 4$ e utilizando (6) temos que $x = 6$ e $y = 2$.

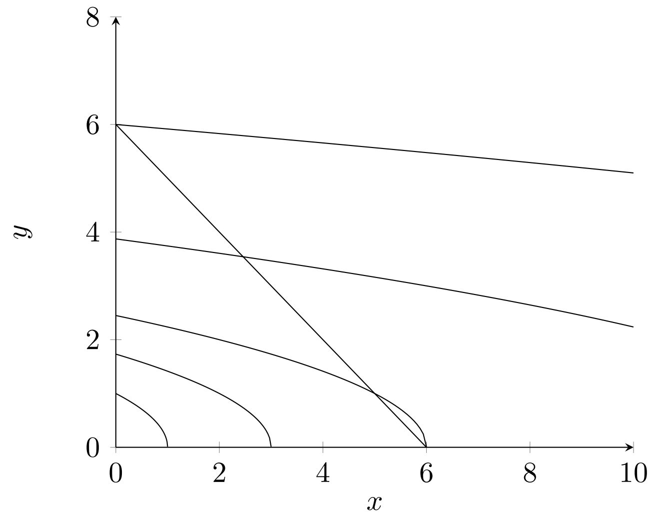
c)

Repare que com a função $z = x+y^2$ terá curvas de nível côncavas, de forma que não será adequado utilizar maximização por Lagrange, pois teremos uma solução de canto.

Comparando a possibilidade de consumir apenas x ou apenas y temos que:

$$z = 6 + 0^2 = 6$$

$$z = 0 + 6^2 = 36$$



Ou seja, o ótimo aqui será $x = 0$ e $y = 6$.

Questão 2:

O Sr. Winston gosta de consumir charutos (c) e whisky (w) de acordo com a função de utilidade $U(c, w) = 30c - 3c^2 + 36w - 6w^2$. Considere as seguintes situações e mostre sua resposta ao que se pede.

(a) O Sr. Winston é um consumidor extremamente rico e não se preocupa com os custos da aquisição dos dois bens. Qual a quantidade de charutos e whisky que ele consome?

(b) Certo dia, o Sr. Winston vai ao médico que recomenda que a soma de charutos e whisky que o Sr. Winston consome não deve ultrapassar 5. Qual o consumo de cada bem se a restrição médica for atendida?

(c) Suponha agora que o Sr. Winston não é rico e possui renda igual a m. Se o preço do charuto é \$25, qual deveria ser o preço do whisky para ele consumir a mesma quantidade de charutos e whisky do item (b)? Qual a renda do Sr. Winston?

R:

a) max $30c - 3c^2 + 36w - 6w^2$

CPOs:

$$\begin{aligned} c: &\quad 30 - 3c = 0 \longrightarrow c = 5 \\ w: &\quad 36 - 15w = 0 \longrightarrow w = 3 \end{aligned}$$

b) max $30c - 3c^2 + 36w - 6w^2$ s.a $c + w \leq 5$

$$\mathscr{L} = 30c - 3c^2 + 36w - 6w^2 - \lambda(c + w - 5)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c} = 30 - 6c - \lambda = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w} = 36 - 12w - \lambda = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = -c - w + 5 = 0 \tag{9}$$

Utilizando (7) e (8) temos que: $30 - 6c = 36 - 12w \longrightarrow -6c + 12w = 6$. Solucionando um sistema junto com (9) temos que $w = 2$ e $c = 3$.

c) max $30c - 3c^2 + 36w - 6w^2$ s.a $25c + pw \leq m$

$$\mathscr{L} = 30c - 3c^2 + 36w - 6w^2 - \lambda(25c + pw - m)$$

CPOs:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c} = 30 - 6c - 25\lambda = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w} = 36 - 12w - p\lambda = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = -25c - pw + m = 0 \tag{12}$$

Utilizando (10) e (11):

$$\frac{30 - 6c}{25} = \frac{36 - 12w}{p} \qquad \longrightarrow \qquad p = \frac{25(36 - 12w)}{(30 - 6c)}$$

Substituindo $w = 2$ e $c = 3$:

$$p = \frac{25(36 - 12.2)}{(30 - 6.3)} = \frac{25.12}{12} = 25$$

Para encontrar a renda, basta fazer $25.3 + 25.2 = m \longrightarrow m = 125$.

Questão 3:

Um consumidor possui uma função de utilidade $u(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{1/2}$. Dado que o preço do bem 1 é 2, o preço do bem 2 é 5 e que o consumidor tem 30 de renda:

(a) Calcule a escolha ótima do consumidor.

(b) Suponha que o governo introduza um imposto de 2 sobre cada unidade do bem 1 consumido. Calcule a nova escolha ótima do consumidor. Como a escolha ótima foi afetada pelo imposto?

(c) Suponha agora um imposto de renda que tenha a mesma arrecadação que o imposto introduzido em (b). Trocando-se o imposto sobre o bem por esse imposto sobre a renda, qual será a nova escolha ótima do consumidor?

(d) Com qual dos impostos, (b) ou (c), o consumidor está numa melhor situação? Forneça a intuição econômica para esse resultado.

(e) Um consumidor com renda $m = 10$ tem função de utilidade $U(x, y) = 0,5ln(x) + 0,5ln(y)$. Suponha que $p_x = p_y = 1$. Explique o que ocorre com a TMS(x,y) se o consumidor mover-se do ponto $(x, y) = (4, 6)$ para o ponto de ótimo? Qual a hipótese sobre a função de utilidade que está por trás da sua resposta?

R:

a) Fazendo o exercício de forma genérica:

max $x_1^\alpha x_2^\beta$ s.a $p_1x_1 + p_2x_2 \leq m$

$$\mathscr{L} = x_1^\alpha x_2^\beta - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - m)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta - \lambda p_1 = 0 \qquad (13)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} = \beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} - \lambda p_2 = 0 \qquad (14)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = -p_1x_1 - p_2x_2 + m = 0 \qquad (15)$$

Dividindo (13) por (14):

$$\frac{\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}}{\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}} = \frac{\lambda p_1}{\lambda p_1} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{p_1}{p_2} \tag{16}$$

$$\alpha x_2 p_2 = \beta x_1 p_1 \tag{17}$$

Substituindo (16) em (15):

$$\begin{aligned} p_1x_1 + \frac{\beta}{\alpha}p_1x_1 &= m \\ (1 + {}^{\beta}/_{\alpha})p_1x_1 &= m \\ x_1 &= \frac{1}{1+{}^{\beta}/_{\alpha}}\frac{m}{p_1} \\ x_1 &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{m}{p_1} \end{aligned}$$

E substituindo x_1 em (16):

$$\begin{aligned} \alpha x_1 p_2 &= \beta\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{m}{p_1}p_1 \\ x_2 &= \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{m}{p_2} \end{aligned}$$

E substituindo os valores, temos que:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{0,5}{1}.\frac{30}{2} = \frac{15}{2} \\ x_2 &= \frac{0,5}{1}.\frac{30}{5} = 3 \end{aligned}$$

b) Imposto de \$2 / unidade sobre o bem 1: $p_1' = p_1 + t = 2 + 2 = 4$

Substituindo nas funções de demanda: $x_1' = 0,5\,\frac{30}{4} = \frac{15}{4}$ e $x_2' = 0,5\,\frac{30}{5} = 3$.

Como trata-se de uma relação de preferências Cobb-Douglas, onde o indivíduo gasta proporções fixas da sua renda com cada bem, um aumento de preço do bem 1 não afeta a quantidade consumida do bem 2, mas diminui a quantidade do bem 1.

c) Imposto de renda com a mesma arrecadação do imposto anterior.

Como o imposto anterior cobrava \$2 por unidade do bem 1 e o consumidor demandava ${}^{15}/_{4}$ unidades, o total da arrecadação anterior era $T = 2 \times {}^{15}/_{4} = {}^{15}/_{2}$.

Assim, a renda do consumidor após pagar o imposto se torna $m'' = m - T = 30 - {}^{15}/_{2} = {}^{45}/_{2}$.

Substituindo em x_1 e x_2:

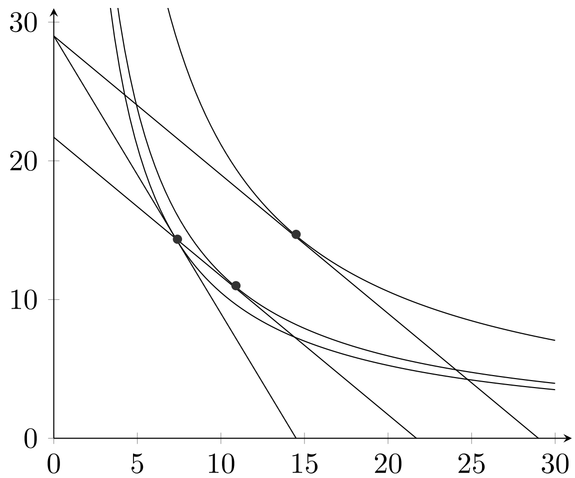
$$x_1'' = 0,5\,\frac{45/2}{2} = \frac{45}{8}$$
$$x_2'' = 0,5\,\frac{45/2}{5} = \frac{9}{4}$$

d) Com qual imposto o consumidor está em uma situação melhor?

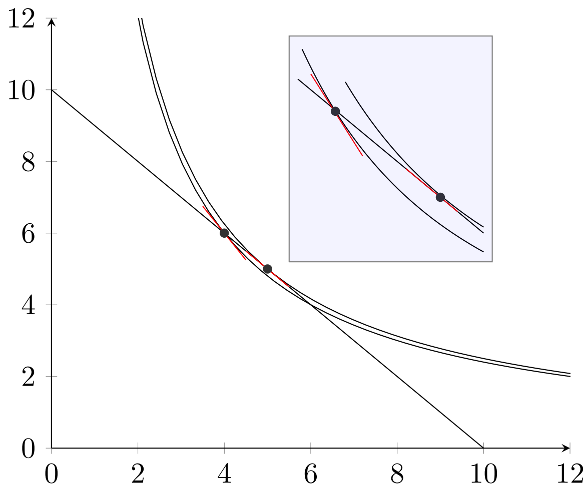
Para vermos isso podemos colocar os valores de x_1 e x_2 consumidos em cada caso:

$$U(X_1', x_2') = (15/4)^{0,5}(3)^{0,5} \cong 3,35 \qquad U(x_1'', x_2'') = (45/8)^{0,5}(9/4)^{0,5} \cong 3,56$$

Assim, o consumidor estará melhor com o imposto sobre a renda. Pois o imposto de renda que arrecada a mesma receita que o imposto sobre quantidade sempre vai permitir que você compre a cesta ótima desse imposto, mas também vai abrir outras possibilidades de escolha, sendo sempre melhor ou igual para o indivíduo.



e)



Com uma utilidade $U(x, y) = 0,5lnx + 0,5lny$ temos uma taxa marginal de substituição:

$$\begin{aligned} TMS &= -\frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y} \\ &= -\frac{0,5/x}{0,5/y} \\ &= -\frac{y}{x} \end{aligned}$$

Sabemos que no ótimo a TMS será igual a razão dos preços, de forma que, com $p_x = p_y = 1$:

$$TMS = -\frac{y}{x} = -\frac{p_x}{p_y} = -\frac{1}{1}$$

$$x = y$$

E, substituindo isso na restrição orçamentária temos:

$$x + y = 10$$

$$x + x = 10$$

$$x = 5$$

$$y = 5$$

Olhando para o valor da TMS no ponto $(4, 6)$:

$$TMS = -\frac{y}{x} = -\frac{6}{4} = -1,5$$

Assim, quando passamos do ponto $(4, 6)$ para o ponto $(5, 5)$ a TMS passa de -1,5 para -1, se igualando a $-{}^{p_x}/_{p_y}$ (inclinação da restrição orçamentária) que é a taxa de troca em vigor no mercado.

A propriedade da função utilidade que permite que isso ocorra é que ela representa preferências estritamente convexas (repare que essas preferências são uma transformação monotônica positiva de preferências Cobb-Douglas) e, portanto, seu ótimo sempre será um ponto de interior (e não uma solução de canto).

Questão 4:

Escreva uma expressão para o multiplicador de Lagrange utilizando as CPOs do problema do consumidor para cada bem? Ofereça uma interpretação para esse multiplicador. (Dica: pense no significado do numerador e do denominador.)

R:

Fazendo a solução de um problema de maximização de utilidade sujeito a uma restrição orçamentária genérico com solução interior:

$$\max\ U(x_1, x_2) \qquad s.a \qquad p_1x_1 + p_2x_2 \leq m$$

$$\mathscr{L} = u(x_1, x_2) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - m)$$

CPOs:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = -p_1 x_1 - p_2 x_2 + m = 0 \quad (20)$$

Utilizando (18) e (19) temos:

$$\lambda = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} \times \frac{1}{p_1} = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} \times \frac{1}{p_2}$$

Olhando para os dois termos que compõe as equações, o primeiro nos dá a utilidade marginal de x_i, ou seja, o quanto ganhamos de utilidade quando aumentamos infinitesimalmente a quantidade de x_i. O segundo termo irá pegar esse valor e dividir pelo preço de x_i. Assim, λ representa o ganho de utilidade quando aumentamos o gasto do indivíduo em x_i.

Esse valor é igual para x_1 e x_2 quanto estamos no ótimo pois, caso fossem diferentes, o indivíduo poderia aumentar sua utilidade trocando o consumo de um bem pelo de outro.

Observe também que, utilizando a utilidade indireta $V(p_1, p_2, m)$:

$$\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial V(p_1, p_2, m)}{\partial m} \times \frac{\partial m}{\partial x_1} = \frac{\partial V(p_1, p_2, m)}{\partial m} \times p_1$$

E assim, temos:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\partial V(p_1, p_2, m)}{\partial m} \times p_1 \times \frac{1}{p_1} = \frac{\partial V(p_1, p_2, m)}{\partial m} \times p_2 \times \frac{1}{p_2} \\ &= \frac{\partial V(p_1, p_2, m)}{\partial m} = \frac{\partial V(p_1, p_2, m)}{\partial m} \end{aligned}$$

Ou seja, o multiplicador de Lagrange pode ser pensado como a utilidade marginal da renda.

Questão 5:

Um solitário morador de uma pequena ilha do Caribe se depara com a decisão de utilizar parte da ilha para cultivar alimentos (A). A área restante da ilha (F) é preservada de forma natural, provendo serviços florestais como sombra, água doce e produtos silvestres. As preferências desse morador em relação a alimentos e produtos florestais são descritas pela função de utilidade $U(A, F) = A^{\alpha} F^{1-\alpha}$, onde $0 < \alpha < 1$. O montante de tempo disponível para o cultivo e preservação ambiental é normalizado em 1 para simplificar.

(a) Considere o caso em que os custos de preparação das áreas de cultivo (A) e de proteção ambiental (F) sejam idênticos e iguais a 1, estabelecendo uma restrição de tempo do tipo $A + F = 1$. Qual será a escolha ótima de área de cultivo e proteção ambiental nesse caso? Represente a escolha ótima graficamente.

(b) Suponha agora que, quando o nosso morador chegou na ilha, já existia uma pequena área cultivada $a < \alpha$. O custo de expansão por unidade de área cultivada além de a é $p > 1$. Considerando os demais custos iguais a 1, represente graficamente a nova restrição. Caracterize a nova escolha ótima.

(c) Considere agora o caso onde já havia uma grande área desmatada, com $f < 1-$. O custo de reflorestamento por unidade de área além de f é $q > 1$. Considerando os demais custos iguais a 1, represente graficamente a nova restrição. Caracterize a nova escolha ótima.

R:

a)

$$\max A^{\alpha}F^{1-\alpha} \qquad s.a \qquad A + F = 1$$

$$\mathscr{L} = A^{\alpha}F^{1-\alpha} - \lambda(A + F - 1)$$

CPOs:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A} = \alpha A^{\alpha-1}F^{1-\alpha} - \lambda = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial F} = (1-\alpha)A^{\alpha}F^{-\alpha} - \lambda = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = A + F - 1 = 0 \tag{23}$$

Utilizando (21) e (22):

$$\alpha A^{\alpha-1}F^{1-\alpha} = (1-\alpha)A^{\alpha}F^{-\alpha}$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{F}{A} = \frac{1}{1}$$

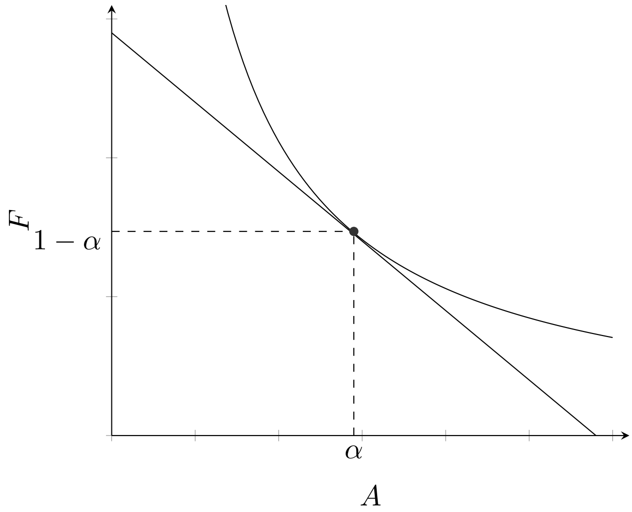
$$\frac{\alpha}{1-\alpha}F = A$$

Substituindo em (23):

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{1-\alpha}F + F &= 1\\ F &= \frac{1}{\frac{\alpha}{1-\alpha}+\frac{1-\alpha}{1-\alpha}}\\ F &= 1-\alpha\end{aligned}$$

Logo:

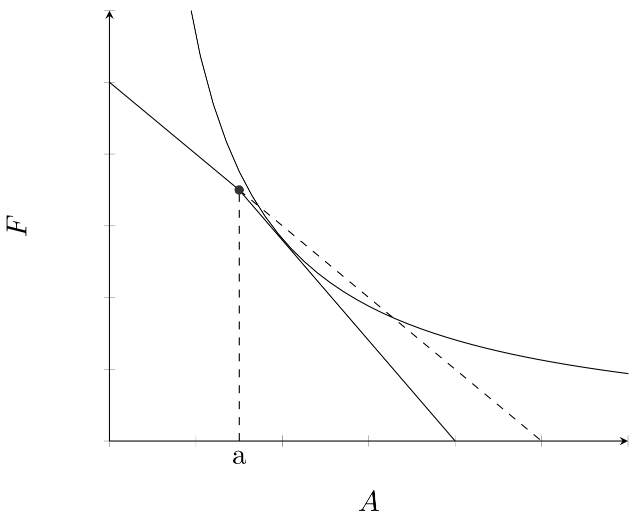
$$\begin{aligned}A &= \frac{\alpha}{1-\alpha}F\\ A &= \frac{\alpha}{1-\alpha}(1-\alpha)\\ A &= \alpha\end{aligned}$$

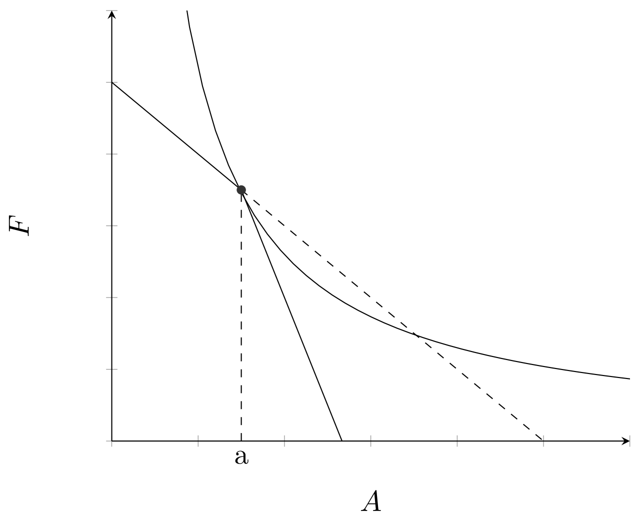


b)

Aqui, temos dois preços distintos para quantidades diferentes de A, para unidades menores que a temos que o preço é igual a 1 e para todas as unidades adicionais o preço será $p > 1$. Assim, a nova restrição orçamentária será:

$$\begin{cases} a + p(A-a) + F = 1 & se\ A \geq a\\ A + F = 1 & se\ A \leq a\end{cases}$$





Observe que, como $a < \alpha$, a quantidade ótima consumida anteriormente não está mais disponível para o consumidor. Assim, sua cesta ótima se dará em um dos dois casos apresentados graficamente acima: ou seu consumo se dará tangenciando a restrição orçamentária em um ponto onde $A > a$, ou teremos uma solução de canto em $A = a$.

Podemos encontrar o valor ótimo assumindo que $A > a$ e encontrando a condição para que isso seja verdade. Assim resolvemos:

$$\max A^\alpha F^{1-\alpha} \qquad s.a \qquad a + p(A - a) + F = 1$$
$$\mathscr{L} = A^\alpha F^{1-\alpha} - \lambda(a + pA - pa + F - 1)$$

CPOs:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A} = \alpha A^{\alpha-1} F^{1-\alpha} - \lambda p = 0 \tag{24}$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial F} = (1-\alpha) A^\alpha F^{-\alpha} - \lambda = 0 \tag{25}$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = a + pA - pa + F - 1 = 0 \tag{26}$$

Isolando λ em (25) e substituindo em (24):

$$\alpha A^{\alpha-1} F^{1-\alpha} = p(1-\alpha) A^\alpha F^{-\alpha}$$
$$F = \frac{(1-\alpha)}{\alpha} pA$$

Isolando pA em (26) e substituindo:

$$F = \frac{(1-\alpha)}{\alpha}(1 - F - (1-p)a)$$
$$\left[1 + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\right] F = \frac{(1-\alpha)}{\alpha}(1 - (1-p)a)$$
$$F = \frac{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}[1 - (1-p)a]}{1 + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}}$$
$$F = (1-\alpha)[1 - (1-p)a]$$

Substituindo F em (26):

$$1 - pA - (1-\alpha)[1 - (1-p)a] - (1-p)a = 0$$
$$pA = 1 - (1-\alpha) - \alpha(1-p)a$$
$$A = \frac{\alpha[1 - (1-p)a]}{p}$$

A condição para que esse resultado seja realmente o valor ótimo é que $A \geq a$, ou seja:

$$\frac{\alpha[1-(1-p)a]}{p} \geq a$$

$$\alpha - \alpha(1-p)a \geq pa$$

$$\alpha(1-a) \geq (1-\alpha)pa$$

$$p \leq \frac{\alpha(1-a)}{a(1-\alpha)}$$

Caso essa condição não seja válida, o ótimo é o valor de canto com $A = a$ e $F = 1 - a$.