

## Incerteza - Gabarito

2019

### Questão 1:

Sobre a Teoria da Utilidade Esperada, assinale Falso ou Verdadeiro e justifique suas respostas.

- (a) Suponha a seguinte função utilidade que representa as preferências dos indivíduos sobre loterias monetárias:  $U(W) = a + bW + cW^{0,5}$ , em que  $W$  é o nível de riqueza do indivíduo, e  $a$ ,  $b$  e  $c$  são parâmetros. Nesse caso, pode-se afirmar que o indivíduo é mais avesso ao risco quanto mais elevada for sua riqueza  $W$ .
- (b) Em modelos de escolha de seguros de automóvel com prêmio de risco atuarialmente justo, indivíduos avessos ao risco sempre escolhem fazer seguro parcial.
- (c) A função de utilidade esperada é invariante a qualquer transformação monotônica crescente.
- (d) Uma pessoa que é avessa ao risco para todos os níveis de renda jamais irá comprar uma ação de uma companhia que oferece um retorno incerto.

**R:**

a) Falso.

Fazendo as derivadas da utilidade pela riqueza:

$$\frac{\partial U}{\partial W} = b + \frac{0,5c}{W^{0,5}} \quad \frac{\partial U'}{\partial W} = -\frac{0,25c}{W^{3/2}}$$

Para termos que o indivíduo tenha uma utilidade crescente na riqueza para todos os valores de  $W$ , temos que  $c > 0$ . Com  $c > 0$ , o indivíduo será avesso ao risco, pois  $U'' < 0$  de forma que  $U(\text{valor esperado}) > UE$ . E assim, um aumento de renda faz com que  $U''$  se aproxime de zero, de forma que o indivíduo se torna mais neutro ao risco, ou menos avesso ao risco.

b) Falso.

Quando o indivíduo avesso ao risco se depara com um seguro atuarialmente justo, sua escolha ótima será se segurar completamente.

c) Falso.

A função de utilidade esperada é invariante apenas às transformações afins crescentes ( $f(x) = ax + b$ ,  $a > 0$ ). A restrição às transformações monotônicas crescentes não é mais adequada pois agora precisamos preservar também a curvatura da função de utilidade para preservar a relação do indivíduo com o risco. Para isso ocorrer, a transformação monotônica também precisa ser uma transformação afim.

d) Falso.

A pessoa neutra ao risco irá preferir obter o valor esperado da loteria no lugar de participar da loteria. Porém, se o preço da loteria / ação for menor do que o seu valor esperado, o indivíduo pode preferir comprar a ação.

## Questão 2:

Suponha que a função de utilidade de um investidor seja  $U(M) = M^{1/2}$ , em que  $M = 150$  é a renda. Suponha que ele deseje aplicar 100% de sua renda na compra de ações de duas empresas, A e B. Os preços de mercado dessas ações são, hoje, iguais a  $P_A = P_B = 15$ , mas podem variar a depender do estado da natureza de acordo com a seguinte distribuição de probabilidade:

Estado da natureza	Probabilidade	$P_A$	$P_B$
0	$\frac{1}{2}$	40	5
1	$\frac{1}{2}$	5	40

Determine a utilidade esperada do investidor, admitindo-se que este invista metade de sua renda em ações da empresa A e a outra metade em B.

**R:**

Se o indivíduo gastar metade da sua renda na compra de cada tipo de ação, ele irá obter:

$$\begin{aligned} A &= \frac{M}{2P_A} & B &= \frac{M}{2P_B} \\ &= \frac{75}{15} = 5 & &= \frac{75}{15} = 5 \end{aligned}$$

Assim, se o estado da natureza 0 ocorrer ele irá receber:

$$M^0 = AP_A^0 + BP_B^0 = 5.40 + 5.5 = 225$$

Logo, sua utilidade será  $U^0(M^0) = U^0(225) = 225^{1/2} = 15$ .

Se o estado da natureza 1 ocorrer ele irá receber:

$$M^1 = AP_A^1 + BP_B^1 = 5.5 + 5.40 = 225$$

Logo, sua utilidade será  $U^1(M^1) = U^1(225) = 225^{1/2} = 15$ .

Como a probabilidade de cada estado ocorrer é 50%, sua utilidade esperada será:

$$\begin{aligned} UE &= Prob(0).U^0 + Prob(1).U^1 \\ &= \frac{1}{2}.15 + \frac{1}{2}.15 \\ &= 15 \end{aligned}$$

### Questão 3:

3. Um consumidor está pensando em fazer uma viagem para a Ásia, onde ele pretende gastar R\$10.000. A função de utilidade desse consumidor depende de que quanto ele conseguirá gastar na viagem,  $M$ , e tem formato  $U(M) = \ln(M)$ . Existe uma probabilidade de 25% de ocorrer uma perda (por exemplo, um roubo) de R\$1.000 durante a viagem.

(a) Calcule a utilidade esperada da viagem.

(b) Suponha que o consumidor possa comprar seguro contra a perda de R\$1.000 num mercado de seguro com livre entrada. Qual o valor do prêmio de seguro que este consumidor pagará?

(c) Mostre que a utilidade esperada do consumidor é maior se ele comprar o seguro do item (b) do que se ele não comprar.

**R:**

a) Com o indivíduo não comprando seguro ele estará sujeito à duas situações:

	Prob	M
sem roubo	0,75	10000
com roubo	0,25	9000

Assim, a sua utilidade esperada sem seguro será:

$$\begin{aligned} UE &= 0,75U(10000) + 0,25U(9000) \\ &= 0,75\ln(10000) + 0,25\ln(9000) \\ &\cong 9,184 \end{aligned}$$

**b)** Prêmio de seguro atuarialmente justo:

Em um mercado de seguro com livre entrada o seguro será atuarialmente justo (lucro da seguradora = 0) de forma que:

$$\gamma K + 0,75(0) + 0,25(-K) = 0$$

Para um seguro de \$1000:

$$\begin{aligned} \gamma 1000 + 0,75(0) + 0,25(-1000) &= 0 \\ \gamma &= \frac{250}{1000} = 0,25 \end{aligned}$$

Assim, o preço do seguro será \$0,25 para cada \$1 segurado, ou seja, terá um prêmio de \$250 para \$1000 segurados.

**c)** Se o consumidor comprar o seguro do item anterior, ou seja, se se segurar completamente pagando um prêmio de \$250, ele paga \$250 e recebe \$1000 se for roubado de forma que:

	Prob	M
sem roubo	0,75	10000 - 250 = 9750
com roubo	0,25	9000 - 250 + 1000 = 9750

Assim, sua utilidade esperada com seguro será:

$$\begin{aligned} UE &= 0,75U(9750) + 0,25U(9750) \\ &= U(9750) = \ln(9750) \cong 9,185 \end{aligned}$$

Dessa forma, como a utilidade esperada sem seguro, calculada no item (a), é aproximadamente 9,184:

$$UE(\text{com seguro}) > UE(\text{sem seguro})$$