CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA 2016.1

PUC RIO

ECO 1113 TEORIA MICROECONÔMICA I N

PROFESSOR: JULIANO ASSUNÇÃO TURMA: 2JA

LISTA 3

1. Indique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas e justifique suas respostas.

(a) Considere uma economia com apenas dois bens e dois indivíduos. O indivíduo 1 tem função de demanda inversa dada por P = P(q) e o indivíduo 2 tem função de demanda inversa dada por P'= P'(q), em que P > P' para todo q. Considere também que a elasticidade-preço da demanda do consumidor 1 é menor que a do consumidor 2. Então a curva de demanda de mercado apresentará uma "quebra" em sua inclinação em P'(0), onde a curva se tornará mais inclinada que a curva de demanda individual do consumidor 1. Falso. A curva de demanda (inversa) de mercado apresentará uma quebra quando o indivíduo 2 começa a consumir, em P'(0), onde a curva se tornará menos inclinada (mais elástica) do que a curva de demanda individual do consumidor 1.

(b) Um produtor que enfrenta uma curva de demanda de mercado linear q(P) = a – bP, estará maximizando sua receita quando produzir q* = a/2. Verdadeiro (veja 2.a).

(c) Se a demanda de mercado de um bem é dada por D(p) = R/p, quanto maior for R, mais elástica será a curva de demanda para um determinado preço. Falso. $\varepsilon^p = dD(p)/dp * p/q = -R/(p^2) * p^2/R = -1$. Elasticidade-preço da demanda não depende de R neste caso.

(d) Se a curva de demanda inversa for uma função linear p(q) = a – bq, então a receita marginal será RM = a – 2bq. Verdadeiro. $R = p(q)q \rightarrow Rmg = p'(q)q + p(q) = -bq + a - bq$.

(e) Em um modelo com dois bens, se um bem for inferior o outro tem que ser bem de luxo. Verdadeiro. (Varian, final do cap. 15) A soma de todas as elasticidades-renda, ponderadas pelas frações da renda gasta com os respectivos bens, será igual a 1: da restrição orçamentária, para qualquer variação da renda e demandas, deve valer $p_1\Delta x_1 + p_2\Delta x_2 = \Delta m$.

Multiplicando Δx_i por x_i/x_i e dividindo os dois lados por m e rearrumando:

$$\frac{p_1x_1}{m}\frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{p_2x_2}{m}\frac{\Delta x_2}{x_2} = \frac{\Delta m}{m}$$

Então $s_1\varepsilon^r{}_1 + s_2\varepsilon^r{}_2 = 1$, em que s_i é a proporção da renda gasta com o bem i (p_ix_i/m) e $\varepsilon^r{}_i$ é a elasticidade-renda do bem i ($\Delta xi/xi$ / $\Delta m/m$). Se $s_1,s_2 > 0$, o bem 1 inferior $\varepsilon^r{}_1 < 0$ implica bem 2 de luxo, $\varepsilon^r{}_2 > 1$.

2. Suponha que o mercado de bananas tenha a seguinte função de demanda: D(p) = a – bp, b>0.

(a) Calcule o preço ótimo para que a receita do mercado de bananas seja maximizada.

Receita: $R = q(p) * p = ap - bp^2$

$\max_p R \rightarrow$ CPO: $a - 2bp = 0 \rightarrow$ **$p = a/2b$** $\rightarrow q = a/2$

(b) Calcule a variação no excedente do consumidor se o preço encontrado na letra (a) for: dobrado e reduzido a metade.

$EC^0 = \left(\frac{a}{b} - \frac{a}{2b}\right)\frac{a}{4} = \frac{a^2}{8b}$

Dobro: $\left(p = \frac{a}{b}, q = 0\right): EC' = 0 \rightarrow \Delta EC' = -\frac{a^2}{8b}$

Metade: $\left(p = \frac{a}{4b}, q = \frac{3a}{4}\right): EC'' = \left(\frac{a}{b} - \frac{a}{4b}\right)\frac{3a}{8} = \frac{9a^2}{32b} \rightarrow \Delta EC'' = \frac{5a^2}{32b}$

(c) Qual a elasticidade-preço nos itens (a) e nas duas situações do item (b).

$\varepsilon = \frac{\partial q}{\partial p}\frac{p}{q}$

Item (a): $\varepsilon = -b\frac{a}{2b}\frac{2}{a} = -1$ (maximiza receita)

Dobro: $\varepsilon = -b\frac{a/b}{0} \rightarrow \infty$ quando $q \rightarrow 0^+$

Metade: $\varepsilon = -b\frac{a}{4b}\frac{4}{3a} = -\frac{1}{3}$

(d) Repita o exercício se a função de demanda for D(p) = 1/p.

Não há um preço que maximiza a receita. A receita não depende do preço e a demanda tem elasticidade constante:

$R = pD(p) = p\frac{1}{p} = 1$

$\varepsilon = -\frac{1}{p^2} * p * p = -1$

3. Dada uma curva de demanda de mercado $D(p) = 100 - 0{,}5p$:

(a) Encontre sua curva de demanda inversa e o vetor preço e quantidade no ótimo.

$$q = 100 - 0{,}5p$$

$$p = \frac{100 - q}{0{,}5} = 200 - 2q$$

A curva de demanda inversa é P(q) = 200 – 2q.

O vetor preço e quantidade no ótimo será aquele $(p, q) = (p^*, q^*)$ que maximiza a receita.

$$R = p * q = p(100 - 0{,}5q) = 100p - \frac{1}{2}p^2$$

$$\frac{dR}{dp} = 0 \rightarrow 100 = p$$

$$R = (200 - 2q)q = 200q - 2q^2$$

$$\frac{dR}{dq} = 0 \rightarrow q = 50$$

$$(p^*, q^*) = (100{,}50)$$

(b) Qual a variação do excedente do consumidor se dobrarmos o preço encontrado na letra a?

$$p' = 200$$

$$VEC = -\int_{100}^{200} 100 - \frac{1}{2}p\, dp = -2500$$

(c) Para que trecho da curva teremos uma demanda elástica? E para demanda inelástica?

No ótimo $\varepsilon = -1, p = 100, q = 50$

$$\varepsilon = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$

Para que a demanda seja elástica temos de ter $\varepsilon < -1$ *e para isso* $p > 100$.

Para que a demanda seja inelástica temos de ter $\varepsilon > -1$ *e para isso* $p < 100$.

4. Considere um mercado que tenha função de demanda inversa linear dada por $P(q) = 6 - q/2$.

(a) Qual a quantidade que maximiza a receita do produtor? $q = 6$

(b) Se o produtor operar na parte inelástica da curva, ele estará maximizando sua receita? Por quê? Não. Ele maximiza a receita quando $\varepsilon = -1$. Caso contrário, a receita aumenta se ele aumentar o preço.

5. Considere a função de demanda por abacates $q = \alpha p^{-(\varepsilon+1)}(m-m^2)$ onde q é a demanda por abacates, p é o preço de um abacate e m é a renda do indivíduo.

(a) Qual é a elasticidade-preço da demanda e qual deve ser o valor de ε para que essa demanda seja inelástica?

$$E_p = \frac{\partial q}{\partial p} * \frac{p}{q} = -(\varepsilon + 1)\alpha p^{-(\varepsilon+2)}(m - m^2) * \frac{p}{\alpha p^{-(\varepsilon+1)}(m - m^2)} = -(\varepsilon + 1)$$

A demanda será inelástica quando $\varepsilon < 0$.

(b) Qual é a elasticidade-renda da demanda e a quais níveis de renda esse bem será inferior ou normal?

$$E_m = \frac{\partial q}{\partial m} * \frac{m}{q} = (1 - 2m)\alpha p^{-(\varepsilon+2)} * \frac{m}{\alpha p^{-(\varepsilon+1)}(m - m^2)} = \frac{1 - 2m}{1 - m}$$

$dq/dm > 0 \rightarrow$ bem normal, $dq/dm < 0 \rightarrow$ bem inferior.
Abacates são um bem inferior para $m > ½$, e normal para $m \leq ½$.

6. Um mercado é formado por dois consumidores: A e B. A função de demanda do consumidor A é dada por $q_A(p) = 20 - 4p$ e a função de demanda do consumidor B é dada por: $q_B(p) = 10/p$ se $p \leq 2$; $q_B(p) = 0$ se $p > 2$.

(a) Calcule as elasticidades-preço das demandas individuais quando p=1. A esse preço, qual dos consumidores tem a demanda mais elástica a preço?

$$\varepsilon_A^{p=1} = \frac{\partial q_A}{\partial p_A} * \frac{p_A}{q_A} = -4 * \frac{1}{16} = -\frac{1}{4}$$

$$\varepsilon_B^{p=1} = \frac{\partial q_B}{\partial p_B} * \frac{p_B}{q_B} = -10 * \frac{1}{10} = -1$$

(b) Obtenha a demanda de mercado.

$$q(p) = \begin{cases} 20 - 4p + \frac{10}{p} & \text{se } p \leq 2 \\ 20 - 4 & \text{se } p > 2 \end{cases}$$

(c) Calcule a elasticidade-preço da demanda de mercado quando p=1.

$$\varepsilon^{p=1} = \frac{\partial q}{\partial p} * \frac{p}{q} = -14 * \frac{1}{26} = -\frac{7}{13}$$

(d) Comparando os resultados dos itens (a) e (c), o que é possível concluir sobre a relação entre a elasticidade-preço da demanda de mercado e as elasticidades-preço das demandas individuais? A elasticidade-preço da demanda de mercado é uma média das demandas individuais: $\varepsilon = \alpha(\varepsilon_A) + (1 - \alpha)(\varepsilon_B)$. *A inclinação da demanda de mercado é a soma da inclinação das demandas individuais.

7. Indique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas e justifique suas respostas.

(a) Uma isoquanta nunca pode apresentar uma inclinação ascendente, se todos os insumos apresentam produtividades marginais positivas. Verdadeiro.
(b) Dizer que a tecnologia apresenta a propriedade de monotonicidade significa que a produção não diminui quando aumenta o uso de um fator. Verdadeiro.
(c) Com y = f(x,y), dizer que o produto marginal de x é decrescente significa que é negativo. Falso.
(d) Se a tecnologia apresenta retornos decrescentes de escala, dobrar a quantidade dos insumos reduz o nível de produção. Falso.
(e) Uma firma cujo produto é gerado por $y = f(x) = 2x - 0{,}03x^2$ maximiza seus lucros quando x=20. Suponha que o preço unitário do produto é 10 e do insumo é 8. Verdadeiro.
$\max_x pf(x) - wx \rightarrow$ CPO: $pf'(x) = w$. Usando f(x), p = 10 e w = 8:
$10(2 - 0{,}06x) = 8 \rightarrow 20 - 0{,}6x = 8 \rightarrow x^* = 20$.

8. Para cada um dos itens a seguir, analise se a função de produção apresenta rendimentos crescentes, constantes ou decrescentes de escala e verifique se o produto marginal do insumo 1 é decrescente.

a. $f(x_1, x_2) = x_1^{0,7} x_2^{0,5}$

$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^{0,7}(tx_2)^{0,5} = t^{1,2} x_1^{0,7} x_2^{0,5} = t^{1,2} f(x_1, x_2)$$

$$f(tx_1, tx_2) > tf(x_1, x_2) \rightarrow \text{retornos crescentes de escala}$$

$$PM_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{0{,}7 x_2^{0,5}}{x_1^{0,3}} \rightarrow PM_1 \text{ é decrescente .}$$

b. $f(x_1, x_2) = (ax_1^{0,5} + bx_2^{0,5})^2$, com a e b > 0

$$f(tx_1, tx_2) = (a(tx_1)^{0,5} + b(tx_2)^{0,5})^2 = \left(t^{0,5}\left(ax_1^{0,5} + bx_2^{0,5}\right)\right)^2 = tf(x_1, x_2)$$

$$f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2) \rightarrow \text{retornos constantes de escala}$$

$$PM_1 = a^2 + \frac{2abx_2^{0,5}}{x_1^{0,5}} \rightarrow PM_1 \text{ é decrescente}$$

c. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$

$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^2 + tx_2 = t(tx_1^2 + x_2)$$

$$f(tx_1, tx_2) > tf(x_1, x_2) \rightarrow \text{retornos crescentes de escala}$$

$$PM_1 = 2x_1 \rightarrow PM_1 \text{ é crescente}$$

d. $f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2)^{0,5}$, com a e b > 0

$$f(tx_1, tx_2) = (atx_1 + btx_2)^{0,5} = (t(ax_1 + bx_2))^{0,5} = t^{0,5} f(x_1, x_2)$$

$$f(tx_1, tx_2) < tf(x_1, x_2) \rightarrow \text{retornos decrescentes de escala}$$

$$PM_1 = \frac{1}{2\sqrt{x_1 + x_2}} \rightarrow PM_1 \text{ é decrescente}$$

e. $f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$, com a e b > 0

$$f(tx_1, tx_2) = \min\{atx_1, btx_2\} = \min\{ax_1, bx_2\}t$$

$$f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2) \rightarrow \text{retornos constantes de escala}$$

$$PM_1 = \begin{cases} a \text{ se } ax_1 < bx_2 \\ 0 \text{ se } ax_1 \geq bx_2 \end{cases} \rightarrow PM_1 \text{é uma função decrescente}$$

9. Um pipoqueiro utiliza milho (x_1) e manteiga (x_2) para produzir pipoca (y) através da tecnologia $y = f(x_1,x_2) = a.\ln(x_1)+ b.\ln(x_2)$. Suponha que os preços da pipoca, do milho e da manteiga sejam, respectivamente, (p,w_1,w_2).

(a) Qual é a produtividade marginal do milho e da manteiga para o pipoqueiro?

milho: $PM_1 = \frac{a}{x_1}$, manteiga: $PM_2 = \frac{b}{x_2}$

(b) Qual a Taxa Marginal de Substituição Técnica?

$TMST = -\frac{PM_1}{PM_2} = -\frac{ax_2}{bx_1}$

(c) Expresse o problema de maximização de lucros do pipoqueiro.

Produtor maximiza o lucro: $\max_{x_1,x_2} \pi = pf(x_1,x_2) - w_1x_1 - w_2x_2$

Ou seja, $\max_{x_1,x_2} p * a\ln(x_1) + p * b\ln(x_2) - w_1x_1 - w_2x_2$

CPO: $\frac{a}{x_1} = \frac{w_1}{p}$ e $\frac{b}{x_2} = \frac{w_2}{p}$

(d) Encontre as demandas pelos fatores milho e manteiga.

$x_1 = \frac{pa}{w_1}$ e $x_2 = \frac{pb}{w_2}$

(e) Expresse o nível ótimo de produção de pipoca como função dos preços.

$y^* = a\ln\left(\frac{pa}{w_1}\right) + b\ln\left(\frac{pb}{w_2}\right)$

(f) O que ocorre com a produção ótima se o preço do milho aumentar? E se o preço da pipoca subir? Diminui e aumenta, respectivamente.

10. Uma firma produz um bem Y utilizando a função de produção Y(L,K) = LK, sendo w=2 e r=1 os preços unitários dos insumos trabalho (L) e capital (K), respectivamente.

a) Demonstre se os retornos de escala da função de produção são crescentes, decrescentes ou constantes.

$$Y(tL,tK) = tLtK = t^2LK$$
$$tY(L,K) = t(LK) = tLK$$

$Y(tL,tK) > tY(L,K)$, logo os retornos são crescentes de escala.

b) Verifique as produtividades marginais para os insumos e demonstre se são crescentes, decrescentes ou constantes.

$$PM_L = K$$

$\frac{dPM_L}{dL} = 0$, logo a Produtividade Marginal de L é constante.

$$PM_K = L$$

$\frac{dPM_K}{dK} = 0$, logo a Produtividade Marginal de K é constante.

c) Tendo em vista os rendimentos de escala da função de produção, o que podemos observar sobre as demandas dos insumos?

Como os rendimentos da função são crescentes de escala, não é possível definir um nível de demanda ótima para os insumos uma vez que tenderão ao infinito. Como cada unidade de insumo a mais investida na produção gera uma quantidade crescente de produto, a firma estará sempre querendo mais insumos para produzir ainda mais.

11. Suponha que a tecnologia de produção do bem Y é dada por $f(K,L) = 600K^2L^2-K^3L^3$, supondo que a quantidade disponível do insumo K é igual a 10 unidades. Nessas circunstâncias:

a) Encontre a quantidade do insumo L que maximiza a função de produção no curto prazo.

$$Máx_L\ f(10,L) = 600 * 10^2L^2 - 10^3L^3$$

$$\frac{df}{dL} = 0 \rightarrow 120.000 * L - 3000 * L^2 = 0$$

$L^* = 0\ ou\ 40$, no entanto se testarmos L=0 teremos Y=0, o que indica que L=0 não nos dá ponto de máximo. Visto isso temos que L^*=40.

b) Indique se a produtividade marginal do L é crescente, decrescente ou constante.

$$PM_L = 1200K^2L - 3K^3L^2$$
$$\frac{dPM_L}{dL} = 1200K^2 - 6K^3L$$

PM_L é crescente para valores de L<$\frac{200}{K}$ e mais especificamente para $\overline{K} = 10$, L<20.

PM_Lé decrescente para L> $\frac{200}{K}$ e mais especificamente para $\overline{K} = 10$, L>20.

c) Desfazendo-nos da restrição de que K=10, mostre se os rendimentos são constantes, crescentes ou decrescentes de escala.

$$f(tK, tL) = 600K^2t^2L^2t^2 - K^3t^3L^3t^3 = 600K^2L^2t^4 - K^3L^3t^6$$
$$tf(K, L) = t(600K^2L^2 - K^3L^3) = 600K^2L^2t - K^3L^3t$$
$$f(tK, tL) - tf(K, L) = 600K^2L^2(t^4 - t) - K^3L^3(t^6 - t)$$

para facilitar a observação do sinal de $f(tK, tL) - tf(K, L)$ vamos dividir tudo por $K^2L^2(t^4 - t)$:

$$600 - KL\frac{(t^6 - t)}{(t^4 - t)}$$

Logo os rendimentos serão crescentes de escala enquanto $KL\frac{(t^6-t)}{(t^4-t)}$<600 e passarão a ser decrescentes de escala para $KL\frac{(t^6-t)}{(t^4-t)} > 600$.

d) Encontre a Taxa Técnica de Substituição para essa função de produção. Interprete economicamente a TTS.

TTS=$-\frac{PM_K}{PM_L} = -\frac{1200KL^2-3K^2L^3}{1200K^2L-3K^3L^2} = -\frac{1200L-3KL^2}{1200K-3K^2L}$=$-\frac{L}{K}$

A TTS representa quanto a mais de L precisamos ganhar para abrirmos mão de uma quantidade de K.

12. Considere a função de produção Cobb-Douglas f(x,y) = Ax^ay^b.

(a) O tipo de rendimento de escala dessa função irá depender da grandeza de a+b. Que valores de a+b estão associados aos diferentes tipos de rendimento de escala?

Se a+b<1, rendimentos serão decrescentes de escala.
Se a+b=1, rendimentos serão constantes de escala.
Se a+b<1, rendimentos serão crescentes de escala.

(b) Determine a produtividade marginal da função produção para x e para y. Para A>0, indique quais serão os valores dos parâmetros que garantirão produtividades marginais decrescentes.

$$PM_x = Aax^{a-1}y^b$$
$$\frac{dPM_x}{dx} < 0 \rightarrow Aa(a-1)x^{a-2}y^b < 0$$

Para que a desigualdade seja respeitada, precisamos ter que a(a-1)<0 e para tanto $a \in$ (0,1).

$$PM_y = Abx^ay^{b-1}$$
$$\frac{dPM_y}{dy} < 0 \rightarrow Ab(b-1)x^ay^{b-2} < 0$$

Para que a desigualdade seja respeitada, precisamos ter que b(b-1)<0 e para tanto $b \in$ (0,1).

(c) Sendo a=b=1 e A=2, determine a inclinação da isoquanta e a interprete economicamente.

A inclinação da isoquanta corresponde a Taxa Técnica de Substituição.

$$TTS = -\frac{PM_x}{PM_y} = -\frac{Aax^{a-1}y^b}{Abx^ay^{b-1}} = -\frac{2 * 1y}{2 * 1x} = -\frac{y}{x}$$

A TTS representa quanto a mais de y precisamos ganhar para abrirmos mão de uma quantidade de x.

13. Uma firma tem a função de produção $f(L, K) = L^{0,5}K$, em que L denota o fator trabalho e K o fator capital. Considere que o preço do bem produzido é 10, que o preço do trabalho é 1 e que o preço do capital é 1.

(a) No curto prazo, a firma não pode ajustar o capital, que é fixo em K=2. Obtenha a quantidade demandada de trabalho que maximiza o lucro no curto prazo.

$\max_{L} 20L^{0,5} - L - 2$

CPO: $10L^{-0,5} = 1 \rightarrow L = 100$

(b) No longo prazo, a firma pode ajustar o capital. Mostre que $(\hat{L}, \hat{K})$ em que $\hat{L} = 10^{-2}$ e $\hat{K} = 2.10^{-2}$, atende às condições de primeira ordem para maximização do lucro no longo prazo.

$\max_{L,K} 10L^{0,5}K - L - K$

CPO: $\begin{cases} 5L^{-0,5}K = 1 \\ 10L^{0,5} = 1 \end{cases} \rightarrow L = 0{,}01;\ K = 0{,}02$

(c) Mostre que $(\hat{L}, \hat{K})$, em que $\hat{L} = 10^{-2}$ e $\hat{K} = 2.10^{-2}$ não maximiza o lucro no longo prazo. Exemplo: maior lucro com L=100 e K=100...

(d) Existe alguma escolha $(\hat{L}, \hat{K})$ que maximiza o lucro no longo prazo? Não. A tecnologia de produção tem retornos crescentes de escala. Sem levar em conta limitações de demanda, a firma sempre prefere produzir mais usando $f(tx_1,tx_2)$, $t > 1$.

14. Uma empresa faz duas escolhas para dois conjuntos diferentes de preço. No período t, ela enfrenta os preços (p^t, w_1^t, w_2^t) e faz as escolhas (y^t, x_1^t, x_2^t). No período s, ela enfrenta os preços (p^s, w_1^s, w_2^s) e faz as escolhas (y^s, x_1^s, x_2^s). Sendo y^t=y^s, se essa firma mantém a mesma função de produção nos dois períodos, e considerando que ela seja maximizadora de lucro, prove que a soma dos produtos das variações dos preços dos fatores pelas variações de suas respectivas demandas não pode ser maior que zero e explique.

Por Lucratividade Revelada:

$$p^t y^t - w_1^t x_1^t - w_2^t x_2^t \geq p^t y^t - w_1^t x_1^s - w_2^t x_2^s$$

e

$$p^s y^t - w_1^s x_1^s - w_2^s x_2^s \geq p^s y^t - w_1^s x_1^t - w_2^s x_2^t$$

Como a Receita da firma é a mesma dos dois lados das desigualdades, nós a cortamos e passamos a ter relações de custos:

$$+w_1^t x_1^t + w_2^t x_2^t \leq +w_1^t x_1^s + w_2^t x_2^s$$
$$+w_1^s x_1^s + w_2^s x_2^s \leq +w_1^s x_1^t + w_2^s x_2^t$$

Vamos passar tudo para um lado das desigualdades e somá-las:

$$+w_1^t x_1^t + w_2^t x_2^t - w_1^t x_1^s - w_2^t x_2^s + w_1^s x_1^s + w_2^s x_2^s - w_1^s x_1^t - w_2^s x_2^t \leq 0$$

Evidenciando:

$$(w_1^s - w_1^t)(x_1^s - x_1^t) + (w_2^s - w_2^t)(x_2^s - x_2^t) \leq 0$$

E colocando em termos de variações:

$$\Delta w_1 \Delta x_1 + \Delta w_2 \Delta x_2 \leq 0$$

Fica provado, portanto, que a soma dos produtos das variações dos preços dos fatores pelas variações de suas respectivas demandas só pode ser menor ou igual a zero, ou seja, não pode ser maior que zero.

Com isso podemos ver que sendo a firma maximizadora de lucros, ela também precisará ser minimizadora de custos. Dada uma determinada receita, a firma escolherá seus insumos de forma a que eles tenham o menor custo para produzir a quantidade desejada.

15. Contas com Cobb-Douglas. Considere uma firma que produz o produto y através da função de produção $f(x) = x_1^a x_2^b$. Seja w_1 e w_2 o preço dos fatores e p o preço do produto final.

(a) Monte o problema de maximização de lucros da firma. Calcule a TMST. Encontre a solução do problema. (Baseado no apêndice do cap.19 do Varian)

$$\Pi(p, w) = \max_{x_1, x_2} pf(x_1, x_2) - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

$$\max_{x_1, x_2} p x_1^a x_2^b - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

$$\text{CPO: } \begin{cases} (x_1)\ p\dfrac{df(x_1, x_2)}{dx_1} = pax_1^{a-1}x_2^b = w_1 \\ (x_2)\ p\dfrac{df(x_1, x_2)}{dx_2} = pbx_1^a x_2^{b-1} = w_2 \end{cases}$$

$$\text{TMST} = -\frac{ax_1^{a-1}x_2^b}{bx_1^a x_2^{b-1}} = -\frac{w_1}{w_2}$$

Multiplicando (x_1) por x_1 e (x_2) por x_2:

$$pax_1^a x_2^b = pay = w_1 x_1 \rightarrow x_1^* = p\frac{ay}{w_1}$$

$$pbx_1^a x_2^b = pby = w_2 x_2 \rightarrow x_2^* = p\frac{by}{w_2}$$

Ainda não é a solução porque ainda tem o y, que é endógeno. Substituindo em $f(x_1,x_2)$:

$$\left(\frac{pay}{w_1}\right)^a \left(\frac{pby}{w_2}\right)^b = y \rightarrow \left(\frac{pa}{w_1}\right)^a \left(\frac{pb}{w_2}\right)^b y^{a+b} = y$$

Isolando o y encontramos a oferta da firma e a solução do problema em função dos parâmetros exógenos do modelo, w_1,w_2 e p:

$$y = \left(\frac{pa}{w_1}\right)^{\frac{a}{1-a-b}} \left(\frac{pb}{w_2}\right)^{\frac{b}{1-a-b}}$$

A demanda pelos fatores é facilmente calculada substituindo y de volta na equação de x^*_1 e x^*_2.

(b) Monte o problema de minimização de custo da firma. Calcule a TMST. Encontre a solução do problema. (Baseado no apêndice do cap.20 do Varian)

$$C(y,w) = \min_{x_1,x_2} w_1x_1 + w_2x_2 \text{ s.a. } f(x_1,x_2) = y$$

$$\min_{x_1,x_2} w_1x_1 + w_2x_2 - \lambda(x_1^a x_2^b - y)$$

$$\text{CPO:} \begin{cases} (x_1)\ \lambda \dfrac{df(x_1,x_2)}{dx_1} = \lambda a x_1^{a-1}x_2^b = w_1 \\ (x_2)\ \lambda \dfrac{df(x_1,x_2)}{dx_2} = \lambda b x_1^a x_2^{b-1} = w_2 \\ (\lambda)\ x_1^a x_2^b = y \end{cases}$$

$$\text{TMST} = -\frac{a x_1^{a-1}x_2^b}{b x_1^a x_2^{b-1}} = -\frac{w_1}{w_2}$$

Multiplicando (x_1) por x_1 e (x_2) por x_2:

$$\lambda a x_1^a x_2^b = \lambda a y = w_1x_1 \rightarrow x_1^* = \lambda \frac{ay}{w_1}$$
$$\lambda b x_1^a x_2^b = \lambda b y = w_2x_2 \rightarrow x_2^* = \lambda \frac{by}{w_2}$$

Ainda não é a solução porque ainda tem o λ, que é endógeno. Substituindo na restrição:

$$\left(\frac{\lambda a y}{w_1}\right)^a \left(\frac{\lambda b y}{w_2}\right)^b = y \rightarrow \lambda = \left(a^{-a}b^{-b}w_1^a w_2^b y^{1-a-b}\right)^{\frac{1}{a+b}}$$

Substituindo de volta na equação de x^*_1 e x^*_2, obtemos a solução do problema : a demanda por fatores em função dos parâmetros exógenos w_1, w_2 e y.

$$x_1(w_1,w_2,y) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} w_1^{\frac{-b}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$
$$x_2(w_1,w_2,y) = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{a}{a+b}} w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{-a}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$

(c) A minimização de custos é condição necessária e suficiente para garantir a maximização de lucros. Essa afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique usando a resposta dos itens anteriores. Falsa. É necessária mas não é suficiente.

A minimização de custo não é suficiente porque não resolve o problema de escolher o nível ótimo de produção que maximiza o lucro. A solução do problema de minimização é a demanda por fatores em função de w *e y*. Já a solução da maximização de lucros é a demanda por fatores em função de w e p.

A minimização de custo é necessária porque resolve o problema do uso ótimo dos insumos para cada nível de produção. Note que ambos os problemas tem CPO parecidas, com λ no lugar de p. Nos dois casos a escolha ótima usa a tecnologia mais barata: segue a regra de que a TMST entre dois fatores é igual à razão entre seus preços.

16. Apresente uma função de produção *f*, um vetor de insumos *z* e preços de insumos *w* tais que *z* é a solução do problema de minimização de custo para um determinado nível de produto *y*, mas não faz parte da solução do problema de maximização de lucro da firma para nenhum preço do produto.
Qualquer tecnologia com retornos crescentes de escala. Por exemplo, a função de produção que usa o insumo z para produzir y seguindo $f(z) = z^2$.

17. Considere as seguintes funções de produção:
$f(z) = z_1+z_2$
$f(z) = \min\{z_1,z_2\}$
$f(z) = z_1^a z_2^b$

(a) Quais apresentam retornos constantes de escala? As duas primeiras apresentam, e a terceira também quando a+b=1.

(b) Calcule a função custo e a demanda condicional por fatores para cada uma delas.
Tecnologia com (insumos) substitutos perfeitos, $y = f(z) = z_1 + z_2$:

$$z_1 = \begin{cases} y \text{ se } w_1 \leq w_2 \\ 0 \text{ c.c} \end{cases};\ z_2 = \begin{cases} y \text{ se } w_1 \geq w_2 \\ 0 \text{ c.c} \end{cases}$$

$$C(w_1, w_2, y) = \min\{w_1 y, w_2 y\}$$

Tecnologia com (insumos) complementos perfeitos, $y = f(z) = \min\{z^1,z^2\}$:

$$\min\{z_1, z_2\} = y \rightarrow z_1 = z_2 = y$$
$$C(w_1, w_2, y) = (w_1 + w_2)y$$

Tecnologia Cobb-Douglas. Feito na questão 15(b). Só falta usar a solução para calcular a função custo: $C(w,y) = w_1 x^*_1 + w_2 x^*_2$. Resolvendo fica:

$$c(w,y) = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{-a}{a+b}}\right] w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$

18. Considere uma firma com função de produção $f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$ e sejam w_1 o preço do fator 1, w_2 o preço do fator 2 e y o nível de produto.

(a) Monte o problema de minimização de custos e obtenha as funções de demanda condicionadas de fatores no longo prazo.

$$\min_{x_1,x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2 \text{ sujeito a } y = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$$

$$\min_{x_1,x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2 + \lambda(x_1^{1/3} x_2^{2/3} - y)$$

$x_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} w_1^{-2/3} w_2^{2/3} y$

$x_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/3} w_1^{1/3} w_2^{-1/3} y$

(b) Calcule a função custo no longo prazo.

$c(w_1, w_2, y) = w_1 x_1 + w_2 x_2$

$c(w_1, w_2, y) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\right] w_1^{1/3} w_2^{2/3}\, y \rightarrow$ rendimentos constantes de escala

(c) No curto prazo, o fator 2 está fixo de tal maneira que $\overline{x_2} = 2^{7/3}$. Supondo $w_1 = w_2 = 1$, calcule o custo mínimo de produzir 4 unidades do produto no curto prazo.

$x_1^{\frac{1}{3}} \left(2^{\frac{7}{3}}\right)^{2/3} = 4 \rightarrow x_1 = \left(\frac{4}{2^{\frac{14}{9}}}\right)^3 = \sim 2{,}46$

$c = x_1 + x_2 = 5{,}04 + 2{,}46 = 7{,}5$

(d) Verifique que o resultado obtido no item (c) é igual ao valor da função custo no longo prazo quando $w_1 = 1$, $w_2 = 1$ e $y = 4$. Por que isso ocorre?

$$c = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/3}\right] 4 = 1{,}89(4) = \sim 7{,}5$$

Isso ocorre porque $\overline{x_2} = 2^{7/3}$ é a escolha ótima para produzir y = 4 quando a firma pode mudar x_1 e x_2 (no longo prazo). Substitua $\overline{x_2} = 2^{7/3}$ na demanda condicionada de x_2 calculada em (a) para verificar.

19. Uma firma tem duas fábricas com função custo $c_1(y_1) = y_1^2/2$ e $c_2(y_2) = y_2$. Qual é a função custo da firma?

$\min_{y_1, y_2} \frac{y_1^2}{2} + y_2 - \lambda(y_1 + y_2 - q)$

CPO: $(y_1)\ y_1 = \lambda$; $(y_2)\ 1 = \lambda \rightarrow y_1 = 1 \rightarrow y_2 = q - 1$

$c(q) = \begin{cases} \frac{q^2}{2} \text{ se } q \le 1 \\ q - \frac{1}{2} \text{ se } q > 1 \end{cases}$

20. Uma firma usa 4 insumos para produzir um produto. A função de produção é $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \min\{x_1,x_2\} + \min\{x_3,x_4\}$.

(a) Qual é o vetor de demanda condicional por fatores para produzir 1 unidade de produto quando o vetor de preços é w = (1,2,3,4)? x = (1,1,0,0)

(b) Qual é a função custo? $c(w,y) = \min\{w_1+w_2, w_3+w_4\}y$

(c) Essa tecnologia tem que tipo de retornos de escala?

Retornos constantes de escala: $f(tx_1,tx_2,tx_3,tx_4) = \min\{tx_1,tx_2\} + \min\{tx_3,tx_4\} = t[\min\{x_1,x_2\} + \min\{x_3,x_4\}] = tf(x_1,x_2,x_3,x_4)$

(d) Uma outra firma tem função de produção $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \min\{x_1+x_2,x_3+x_4\}$. Como mudam as respostas anteriores?

x = (1,0,1,0). $c(w,y) = (\min\{w_1,w_2\}+\min\{w_3,w_4\})y$. Continua com retornos constantes de escala: $f(tx_1,tx_2,tx_3,tx_4) = \min\{t(x_1+x_2), t(x_3, x_4)\} = t[\min\{x_1+x_2, x_3+x_4\}] = tf(x_1,x_2,x_3,x_4)$.