

ECO 1113 TEORIA MICROECONÔMICA I N

PROFESSOR: JULIANO ASSUNÇÃO

TURMA: 2JA

LISTA 3

- Indique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas e justifique suas respostas.
 - Considere uma economia com apenas dois bens e dois indivíduos. O indivíduo 1 tem função de demanda inversa dada por $P = P(q)$ e o indivíduo 2 tem função de demanda inversa dada por $P' = P'(q)$, em que $P > P'$ para todo q . Considere também que a elasticidade-preço da demanda do consumidor 1 é menor que a do consumidor 2. Então a curva de demanda de mercado apresentará uma “quebra” em sua inclinação em $P'(0)$, onde a curva se tornará mais inclinada que a curva de demanda individual do consumidor 1. **Falso.** A curva de demanda (inversa) de mercado apresentará uma quebra quando o indivíduo 2 começa a consumir, em $P'(0)$, onde a curva se tornará menos inclinada (mais elástica) do que a curva de demanda individual do consumidor 1.
 - Um produtor que enfrenta uma curva de demanda de mercado linear $q(P) = a - bP$, estará maximizando sua receita quando produzir $q^* = a/2$. **Verdadeiro** (veja 2.a).
 - Se a demanda de mercado de um bem é dada por $D(p) = R/p$, quanto maior for R , mais elástica será a curva de demanda para um determinado preço. **Falso.** $\epsilon^p = dD(p)/dp * p/q = -R/(p^2) * p^2/R = -1$. Elasticidade-preço da demanda não depende de R neste caso.
 - Se a curva de demanda inversa for uma função linear $p(q) = a - bq$, então a receita marginal será $RM = a - 2bq$. **Verdadeiro.** $R = p(q)q \rightarrow R_{mg} = p'(q)q + p(q) = -bq + a - bq$.
 - Em um modelo com dois bens, se um bem for inferior o outro tem que ser bem de luxo. **Verdadeiro.** $s_1\epsilon^r_1 + s_2\epsilon^r_2 = 1$, em que s_i é a proporção da renda gasta com o bem i e ϵ^r_i é a elasticidade-renda do bem i . Se o bem i é inferior $|\epsilon^r_i| < 1$, então o outro bem tem que ser inferior.
- Suponha que o mercado de bananas tenha a seguinte função de demanda: $D(p) = a - bp$, $b > 0$.
 - Calcule o preço ótimo para que a receita do mercado de bananas seja maximizada.
 Receita: $R = q(p) * p = ap - bp^2$
 $\max_p R \rightarrow CPO: a - 2bp = 0 \rightarrow p = a/2b \rightarrow q = a/2$
 - Calcule a variação no excedente do consumidor se o preço encontrado na letra (a) for: dobrado e reduzido a metade.
 $EC^0 = \left(\frac{a}{b} - \frac{a}{2b}\right) \frac{a}{4} = \frac{a^2}{8b}$
 Dobro: $\left(p = \frac{a}{b}, q = 0\right): EC' = 0 \rightarrow \Delta EC' = -\frac{a^2}{8b}$
 Metade: $\left(p = \frac{a}{4b}, q = \frac{3a}{4}\right): EC'' = \left(\frac{a}{b} - \frac{a}{4b}\right) \frac{3a}{8} = \frac{9a^2}{32b} \rightarrow \Delta EC'' = \frac{5a^2}{32b}$

- (c) Qual a elasticidade-preço nos itens (a) e nas duas situações do item (b).

$$\varepsilon = \frac{\partial q}{\partial p} \frac{p}{q}$$

Item (a): $\varepsilon = -b \frac{a}{2b} \frac{2}{a} = -1$ (maximiza receita)

Dobro: $\varepsilon = -b \frac{a/b}{0} \rightarrow \infty$ quando $q \rightarrow 0^+$

Metade: $\varepsilon = -b \frac{a}{4b} \frac{4}{3a} = -\frac{1}{3}$

- (d) Repita o exercício se a função de demanda for $D(p) = 1/p$.

Não há um preço que maximiza a receita. A receita não depende do preço e a demanda tem elasticidade constante:

$$R = pD(p) = p \frac{1}{p} = 1$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{p^2} * p * p = -1$$

3. Dada uma curva de demanda de mercado $D(p) = 100 - 0,5p$:

- (a) Encontre sua curva de demanda inversa e o vetor preço e quantidade no ótimo.

$$q = 100 - 0,5p$$

$$p = \frac{100 - q}{0,5} = 200 - 2q$$

A curva de demanda inversa é $P(q) = 200 - 2q$.

O vetor preço e quantidade no ótimo será aquele $(p, q) = (p^*, q^*)$ que maximiza a receita.

$$R = p * q = p(100 - 0,5q) = 100p - \frac{1}{2}p^2$$

$$\frac{dR}{dp} = 0 \rightarrow 100 = p$$

$$R = (200 - 2q)q = 200q - 2q^2$$

$$\frac{dR}{dq} = 0 \rightarrow q = 50$$

$$(p^*, q^*) = (100, 50)$$

- (b) Qual a variação do excedente do consumidor se dobrarmos o preço encontrado na letra a?

$$p' = 200$$

$$VEC = - \int_{100}^{200} 100 - \frac{1}{2}p \, dp = -2500$$

- (c) Para que trecho da curva teremos uma demanda elástica? E para demanda inelástica?

No ótimo $\varepsilon = -1, p = 100, q = 50$

$$\varepsilon = \frac{p}{q} \frac{dq}{dp}$$

Para que a demanda seja elástica temos de ter $\varepsilon < -1$ e para isso $p > 100$.

Para que a demanda seja inelástica temos de ter $\varepsilon > -1$ e para isso $p < 100$.

4. Considere um mercado que tenha função de demanda inversa linear dada por $P(q) = 6 - q/2$.

- (a) Qual a quantidade que maximiza a receita do produtor? $q = 6$

- (b) Se o produtor operar na parte inelástica da curva, ele estará maximizando sua receita? Por quê? Não. Ele nunca vai operar na parte inelástica da curva porque a receita aumenta quando o preço aumenta. Seja a receita $R(p) = p \cdot q(p) \rightarrow R'(p) = q(p) + p \cdot q'(p)$.

A receita marginal é positiva quando $\varepsilon = p/q \cdot q'(p) > -1$ (inelástica):

$$R'(p) > 0 \rightarrow q(p)/q(p) + p \cdot q'(p)/q(p) > 0 \rightarrow \varepsilon > -1.$$

*Notação: $q'(p) = dq(p)/dp$.

5. Considere a função de demanda por abacates $q = \alpha p^{-(\varepsilon+1)}(m - m^2)$ onde q é a demanda por abacates, p é o preço de um abacate e m é a renda do indivíduo.

- (a) Qual é a elasticidade-preço da demanda e qual deve ser o valor de ε para que essa demanda seja inelástica?

$$E_p = \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{p}{q} = -(\varepsilon + 1)\alpha p^{-(\varepsilon+2)}(m - m^2) \cdot \frac{p}{\alpha p^{-(\varepsilon+1)}(m - m^2)} = -(\varepsilon + 1)$$

A demanda será inelástica quando $\varepsilon < 0$.

- (b) Qual é a elasticidade-renda da demanda e a quais níveis de renda esse bem será inferior ou normal?

$$E_m = \frac{\partial q}{\partial m} \cdot \frac{m}{q} = (1 - 2m)\alpha p^{-(\varepsilon+2)} \cdot \frac{m}{\alpha p^{-(\varepsilon+1)}(m - m^2)} = \frac{1 - 2m}{1 - m}$$

$E_m > 0 \rightarrow$ bem normal, $E_m < 0 \rightarrow$ bem inferior.

Abacates são um bem inferior para $\frac{1}{2} < m < 1$, e normal para $m < \frac{1}{2}$ e $m > 1$.

6. Um mercado é formado por dois consumidores: A e B. A função de demanda do consumidor A é dada por $q_A(p) = 20 - 4p$ e a função de demanda do consumidor B é dada por: $q_B(p) = 10/p$ se $p \leq 2$; $q_B(p) = 0$ se $p > 2$.

- (a) Calcule as elasticidades-preço das demandas individuais quando $p=1$. A esse preço, qual dos consumidores tem a demanda mais elástica a preço?

$$\varepsilon_A^{p=1} = \frac{\partial q_A}{\partial p_A} \cdot \frac{p_A}{q_A} = -4 \cdot \frac{1}{16} = -\frac{1}{4}$$

$$\varepsilon_B^{p=1} = \frac{\partial q_B}{\partial p_B} \cdot \frac{p_B}{q_B} = -10 \cdot \frac{1}{10} = -1$$

- (b) Obtenha a demanda de mercado.

$$q(p) = \begin{cases} 20 - 4p + \frac{10}{p} & \text{se } p \leq 2 \\ 20 - 4 & \text{se } p > 2 \end{cases}$$

- (c) Calcule a elasticidade-preço da demanda de mercado quando $p=1$.

$$\varepsilon^{p=1} = \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{p}{q} = -14 \cdot \frac{1}{26} = -\frac{7}{13}$$

- (d) Comparando os resultados dos itens (a) e (c), o que é possível concluir sobre a relação entre a elasticidade-preço da demanda de mercado e as elasticidades-preço das demandas individuais? A elasticidade-preço da demanda de mercado é uma média das demandas individuais: $\varepsilon = \alpha(\varepsilon_A) + (1 - \alpha)(\varepsilon_B)$. *A inclinação da demanda de mercado é a soma da inclinação das demandas individuais.

7. Indique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas e justifique suas respostas.

- (a) Uma isoquanta nunca pode apresentar uma inclinação ascendente, se todos os insumos apresentam produtividades marginais positivas. **Verdadeiro.**

- (b) Dizer que a tecnologia apresenta a propriedade de monotonicidade significa que a produção não diminui quando aumenta o uso de um fator. **Verdadeiro.**
- (c) Com $y = f(x,y)$, dizer que o produto marginal de x é decrescente significa que é negativo. **Falso.**
- (d) Se a tecnologia apresenta retornos decrescentes de escala, dobrar a quantidade dos insumos reduz o nível de produção. **Falso.**
- (e) Uma firma cujo produto é gerado por $y = f(x) = 2x - 0,03x^2$ maximiza seus lucros quando $x=20$. Suponha que o preço unitário do produto é 10 e do insumo é 8. **Verdadeiro.**
 $\max_x pf(x) - wx \rightarrow \text{CPO: } pf'(x) = w$. Usando $f(x)$, $p = 10$ e $w = 8$:
 $10(2 - 0,06x) = 8 \rightarrow 20 - 0,6x = 8 \rightarrow x^* = 20$.

8. Para cada um dos itens a seguir, analise se a função de produção apresenta rendimentos crescentes, constantes ou decrescentes de escala e verifique se o produto marginal do insumo 1 é decrescente.

a. $f(x_1, x_2) = x_1^{0,7} x_2^{0,5}$

$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^{0,7} (tx_2)^{0,5} = t^{1,2} x_1^{0,7} x_2^{0,5} = t^{1,2} f(x_1, x_2)$$

$$f(tx_1, tx_2) > t f(x_1, x_2) \rightarrow \text{retornos crescentes de escala}$$

$$PM_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{0,7 x_2^{0,5}}{x_1^{0,3}} \rightarrow PM_1 \text{ é decrescente.}$$

b. $f(x_1, x_2) = (ax_1^{0,5} + bx_2^{0,5})^2$, com a e $b > 0$

$$f(tx_1, tx_2) = (a(tx_1)^{0,5} + b(tx_2)^{0,5})^2 = \left(t^{0,5}(ax_1^{0,5} + bx_2^{0,5})\right)^2 = t f(x_1, x_2)$$

$$f(tx_1, tx_2) = t f(x_1, x_2) \rightarrow \text{retornos constantes de escala}$$

$$PM_1 = a^2 + \frac{2abx_2^{0,5}}{x_1^{0,5}} \rightarrow PM_1 \text{ é decrescente}$$

c. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$

$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^2 + tx_2 = t(tx_1^2 + x_2)$$

$$f(tx_1, tx_2) > t f(x_1, x_2) \rightarrow \text{retornos crescentes de escala}$$

$$PM_1 = 2x_1 \rightarrow PM_1 \text{ é crescente}$$

d. $f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2)^{0,5}$, com a e $b > 0$

$$f(tx_1, tx_2) = (atx_1 + btx_2)^{0,5} = (t(ax_1 + bx_2))^{0,5} = t^{0,5} f(x_1, x_2)$$

$$f(tx_1, tx_2) < t f(x_1, x_2) \rightarrow \text{retornos decrescentes de escala}$$

$$PM_1 = \frac{1}{2\sqrt{ax_1 + bx_2}} \rightarrow PM_1 \text{ é decrescente}$$

e. $f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$, com a e $b > 0$

$$f(tx_1, tx_2) = \min\{atx_1, btx_2\} = \min\{ax_1, bx_2\}t$$

$$f(tx_1, tx_2) = t f(x_1, x_2) \rightarrow \text{retornos constantes de escala}$$

$$PM_1 = \begin{cases} a & \text{se } ax_1 < bx_2 \\ 0 & \text{se } ax_1 \geq bx_2 \end{cases} \rightarrow PM_1 \text{ é uma função decrescente}$$

9. Um pipoqueiro utiliza milho (x_1) e manteiga (x_2) para produzir pipoca (y) através da tecnologia $y = f(x_1, x_2) = a \ln(x_1) + b \ln(x_2)$. Suponha que os preços da pipoca, do milho e da manteiga sejam, respectivamente, (p, w_1, w_2) .

(a) Qual é a produtividade marginal do milho e da manteiga para o pipoqueiro?

$$\text{milho: } PM_1 = \frac{a}{x_1}, \text{ manteiga: } PM_2 = \frac{b}{x_2}$$

(b) Qual a Taxa Marginal de Substituição Técnica?

$$TMST = -\frac{PM_1}{PM_2} = -\frac{ax_2}{bx_1}$$

(c) Expresse o problema de maximização de lucros do pipoqueiro.

$$\text{Produtor maximiza o lucro: } \max_{x_1, x_2} \pi = pf(x_1, x_2) - w_1x_1 - w_2x_2$$

$$\text{Ou seja, } \max_{x_1, x_2} p * a \ln(x_1) + p * b \ln(x_2) - w_1x_1 - w_2x_2$$

$$\text{CPO: } \frac{a}{x_1} = \frac{w_1}{p} \text{ e } \frac{b}{x_2} = \frac{w_2}{p}$$

(d) Encontre as demandas pelos fatores milho e manteiga.

$$x_1 = \frac{pa}{w_1} \text{ e } x_2 = \frac{pb}{w_2}$$

(e) Expresse o nível ótimo de produção de pipoca como função dos preços.

$$y^* = a \ln\left(\frac{pa}{w_1}\right) + b \ln\left(\frac{pb}{w_2}\right)$$

(f) O que ocorre com a produção ótima se o preço do milho aumentar? E se o preço da pipoca subir? Diminui e aumenta, respectivamente.

10. Uma firma produz um bem Y utilizando a função de produção $Y(L, K) = LK$, sendo $w=2$ e $r=1$ os preços unitários dos insumos trabalho (L) e capital (K), respectivamente.

a) Demonstre se os retornos de escala da função de produção são crescentes, decrescentes ou constantes.

$$Y(tL, tK) = tLtK = t^2LK$$

$$tY(L, K) = t(LK) = tLK$$

$$Y(tL, tK) > tY(L, K), \text{ logo os retornos são crescentes de escala.}$$

b) Verifique as produtividades marginais para os insumos e demonstre se são crescentes, decrescentes ou constantes.

$$PM_L = K$$

$$\frac{dPM_L}{dL} = 0, \text{ logo a Produtividade Marginal de L é constante.}$$

$$PM_K = L$$

$$\frac{dPM_K}{dK} = 0, \text{ logo a Produtividade Marginal de K é constante.}$$

c) Tendo em vista os rendimentos de escala da função de produção, o que podemos observar sobre as demandas dos insumos?

Como os rendimentos da função são crescentes de escala, não é possível definir um nível de demanda ótima para os insumos uma vez que tenderão ao infinito. Como cada unidade de insumo a mais investida na produção gera uma quantidade crescente de produto, a firma estará sempre querendo mais insumos para produzir ainda mais.

11. Suponha que a tecnologia de produção do bem Y é dada por $f(K, L) = 600K^2L^2 - K^3L^3$, supondo que a quantidade disponível do insumo K é igual a 10 unidades. Nessas circunstâncias:

a) Encontre a quantidade do insumo L que maximiza a função de produção no curto prazo.

$$\text{Máx}_L f(10, L) = 600 * 10^2 L^2 - 10^3 L^3$$

$$\frac{df}{dL} = 0 \rightarrow 120.000 * L - 3000 * L^2 = 0$$

$L^* = 0$ ou 40, no entanto se testarmos $L=0$ teremos $Y=0$, o que indica que $L=0$ não nos dá ponto de máximo. Visto isso temos que $L^*=40$.

b) Indique se a produtividade marginal do L é crescente, decrescente ou constante.

$$PM_L = 1200K^2L - 3K^3L^2$$

$$\frac{dPM_L}{dL} = 1200K^2 - 6K^3L$$

PM_L é crescente para valores de $L < \frac{200}{K}$ e mais especificamente para $\bar{K} = 10, L < 20$.

PM_L é decrescente para $L > \frac{200}{K}$ e mais especificamente para $\bar{K} = 10, L > 20$.

c) Desfazendo-nos da restrição de que $K=10$, mostre se os rendimentos são constantes, crescentes ou decrescentes de escala.

$$f(tK, tL) = 600K^2t^2L^2t^2 - K^3t^3L^3t^3 = 600K^2L^2t^4 - K^3L^3t^6$$

$$tf(K, L) = t(600K^2L^2 - K^3L^3) = 600K^2L^2t - K^3L^3t$$

$$f(tK, tL) - tf(K, L) = 600K^2L^2(t^4 - t) - K^3L^3(t^6 - t)$$

para facilitar a observação do sinal de $f(tK, tL) - tf(K, L)$ vamos dividir tudo por $K^2L^2(t^4 - t)$:

$$600 - KL \frac{(t^6 - t)}{(t^4 - t)}$$

Logo os rendimentos serão crescentes de escala enquanto $KL \frac{(t^6 - t)}{(t^4 - t)} < 600$ e passarão a ser decrescentes de escala para $KL \frac{(t^6 - t)}{(t^4 - t)} > 600$.

d) Encontre a Taxa Técnica de Substituição para essa função de produção. Interprete economicamente a TTS.

$$TTS = -\frac{PM_K}{PM_L} = -\frac{1200KL^2 - 3K^2L^3}{1200K^2L - 3K^3L^2} = -\frac{1200L - 3KL^2}{1200K - 3K^2L} = -\frac{L}{K}$$

A TTS representa quanto a mais de L precisamos ganhar para abrimos mão de uma quantidade de K.

12. Considere a função de produção Cobb-Douglas $f(x, y) = Ax^a y^b$.

(a) O tipo de rendimento de escala dessa função irá depender da grandeza de $a+b$. Que valores de $a+b$ estão associados aos diferentes tipos de rendimento de escala?

Se $a+b < 1$, rendimentos serão decrescentes de escala.

Se $a+b = 1$, rendimentos serão constantes de escala.

Se $a+b > 1$, rendimentos serão crescentes de escala.

(b) Determine a produtividade marginal da função produção para x e para y. Para $A > 0$, indique quais serão os valores dos parâmetros que garantirão produtividades marginais decrescentes.

$$PM_x = Aax^{a-1}y^b$$

$$\frac{dPM_x}{dx} < 0 \rightarrow Aa(a-1)x^{a-2}y^b < 0$$

Para que a desigualdade seja respeitada, precisamos ter que $a(a-1) < 0$ e para tanto $a \in (0, 1)$.

$$PM_y = Abx^a y^{b-1}$$

$$\frac{dPM_y}{dy} < 0 \rightarrow Ab(b-1)x^a y^{b-2} < 0$$

Para que a desigualdade seja respeitada, precisamos ter que $b(b-1) < 0$ e para tanto $b \in (0, 1)$.

(c) Sendo $a=b=1$ e $A=2$, determine a inclinação da isoquanta e a interprete economicamente.

A inclinação da isoquanta corresponde a Taxa Técnica de Substituição.

$$TTS = -\frac{PM_x}{PM_y} = -\frac{Aax^{a-1}y^b}{Abx^a y^{b-1}} = -\frac{2 * 1y}{2 * 1x} = -\frac{y}{x}$$

A TTS representa quanto a mais de y precisamos ganhar para abrimos mão de uma quantidade de x .

13. Uma firma tem a função de produção $f(L, K) = L^{0,5}K$, em que L denota o fator trabalho e K o fator capital. Considere que o preço do bem produzido é 10, que o preço do trabalho é 1 e que o preço do capital é 1.

(a) No curto prazo, a firma não pode ajustar o capital, que é fixo em $K=2$. Obtenha a quantidade demandada de trabalho que maximiza o lucro no curto prazo.

$$\max_L 20L^{0,5} - L - 2$$

$$\text{CPO: } 10L^{-0,5} = 1 \rightarrow L = 100$$

(b) No longo prazo, a firma pode ajustar o capital. Mostre que (\hat{L}, \hat{K}) em que $\hat{L} = 10^{-2}$ e $\hat{K} = 2 \cdot 10^{-2}$, atende às condições de primeira ordem para maximização do lucro no longo prazo.

$$\max_{L,K} 10L^{0,5}K - L - K$$

$$\text{CPO} \begin{cases} 5L^{-0,5}K = 1 \\ 10L^{0,5} = 1 \end{cases} \rightarrow L = 0,01, K = 0,02$$

(c) Mostre que (\hat{L}, \hat{K}) , em que $\hat{L} = 10^{-2}$ e $\hat{K} = 2 \cdot 10^{-2}$ não maximiza o lucro no longo prazo. Exemplo: maior lucro com $L=100$ e $K=100$...

(d) Existe alguma escolha (\hat{L}, \hat{K}) que maximiza o lucro no longo prazo? Não. A tecnologia de produção tem retornos crescentes de escala. Sem levar em conta limitações de demanda, a firma sempre prefere produzir mais usando $f(tx_1, tx_2)$, $t > 1$.

14. Uma empresa faz duas escolhas para dois conjuntos diferentes de preço. No período t , ela enfrenta os preços (p^t, w_1^t, w_2^t) e faz as escolhas (y^t, x_1^t, x_2^t) . No período s , ela enfrenta os preços (p^s, w_1^s, w_2^s) e faz as escolhas (y^s, x_1^s, x_2^s) . Sendo $y^t = y^s$, se essa firma mantém a mesma função de produção nos dois períodos, e considerando que ela seja maximizadora de lucro, prove que a soma dos produtos das variações dos preços dos fatores pelas variações de suas respectivas demandas não pode ser maior que zero e explique.

Por Lucratividade Revelada:

$$p^t y^t - w_1^t x_1^t - w_2^t x_2^t \geq p^t y^t - w_1^t x_1^s - w_2^t x_2^s$$

$$p^s y^t - w_1^s x_1^s - w_2^s x_2^s \geq p^s y^t - w_1^s x_1^t - w_2^s x_2^t$$

Como a Receita da firma é a mesma dos dois lados das desigualdades, nós a cortamos e passamos a ter relações de custos:

$$\begin{aligned} +w_1^t x_1^t + w_2^t x_2^t &\leq +w_1^t x_1^s + w_2^t x_2^s \\ +w_1^s x_1^s + w_2^s x_2^s &\leq +w_1^s x_1^t + w_2^s x_2^t \end{aligned}$$

Vamos passar tudo para um lado das desigualdades e somá-las:

$$+w_1^t x_1^t + w_2^t x_2^t - w_1^t x_1^s - w_2^t x_2^s + w_1^s x_1^s + w_2^s x_2^s - w_1^s x_1^t - w_2^s x_2^t \leq 0$$

Evidenciando:

$$(w_1^s - w_1^t)(x_1^s - x_1^t) + (w_2^s - w_2^t)(x_2^s - x_2^t) \leq 0$$

E colocando em termos de variações:

$$\Delta w_1 \Delta x_1 + \Delta w_2 \Delta x_2 \leq 0$$

Fica provado, portanto, que a soma dos produtos das variações dos preços dos fatores pelas variações de suas respectivas demandas só pode ser menor ou igual a zero, ou seja, não pode ser maior que zero.

Com isso podemos ver que sendo a firma maximizadora de lucros, ela também precisará ser minimizadora de custos. Dada uma determinada receita, a firma escolherá seus insumos de forma a que eles tenham o menor custo para produzir a quantidade desejada.

15. Contas com Cobb-Douglas. Considere uma firma que produz o produto y através da função de produção $f(x) = x_1^a x_2^b$. Seja w_1 e w_2 o preço dos fatores e p o preço do produto final.
- (a) Monte o problema de maximização de lucros da firma. Calcule a TMST. Encontre a solução do problema. (Baseado no apêndice do cap.19 do Varian)

$$\Pi(p, w) = \max_{x_1, x_2} p f(x_1, x_2) - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

$$\max_{x_1, x_2} p x_1^a x_2^b - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

$$\text{CPO: } \begin{cases} (x_1) p \frac{df(x_1, x_2)}{dx_1} = p a x_1^{a-1} x_2^b = w_1 \\ (x_2) p \frac{df(x_1, x_2)}{dx_2} = p b x_1^a x_2^{b-1} = w_2 \end{cases}$$

$$\text{TMST} = - \frac{a x_1^{a-1} x_2^b}{b x_1^a x_2^{b-1}} = - \frac{w_1}{w_2}$$

Multiplicando (x_1) por x_1 e (x_2) por x_2 :

$$\begin{aligned} p a x_1^{a-1} x_2^b &= p a y = w_1 x_1 \rightarrow x_1^* = p \frac{a y}{w_1} \\ p b x_1^a x_2^{b-1} &= p b y = w_2 x_2 \rightarrow x_2^* = p \frac{b y}{w_2} \end{aligned}$$

Ainda não é a solução porque ainda tem o y , que é endógeno. Substituindo em $f(x_1, x_2)$:

$$\left(\frac{p a y}{w_1} \right)^a \left(\frac{p b y}{w_2} \right)^b = y \rightarrow \left(\frac{p a}{w_1} \right)^a \left(\frac{p b}{w_2} \right)^b y^{a+b} = y$$

Isolando o y encontramos a oferta da firma e a solução do problema em função dos parâmetros exógenos do modelo, w_1, w_2 e p :

$$y = \left(\frac{p a}{w_1} \right)^{\frac{a}{1-a-b}} \left(\frac{p b}{w_2} \right)^{\frac{b}{1-a-b}}$$

A demanda pelos fatores é facilmente calculada substituindo y de volta na equação de x_1^* e x_2^* .

- (b) Monte o problema de minimização de custo da firma. Calcule a TMST. Encontre a solução do problema. (Baseado no apêndice do cap.20 do Varian)

$$C(y, w) = \min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2 \text{ s. a. } f(x_1, x_2) = y$$

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2 - \lambda(x_1^a x_2^b - y)$$

$$\text{CPO: } \begin{cases} (x_1) \lambda \frac{df(x_1, x_2)}{dx_1} = \lambda a x_1^{a-1} x_2^b = w_1 \\ (x_2) \lambda \frac{df(x_1, x_2)}{dx_2} = \lambda b x_1^a x_2^{b-1} = w_2 \\ (\lambda) x_1^a x_2^b = y \end{cases}$$

$$\text{TMST} = -\frac{ax_1^{a-1}x_2^b}{bx_1^ax_2^{b-1}} = -\frac{w_1}{w_2}$$

Multiplicando (x_1) por x_1 e (x_2) por x_2 :

$$\lambda a x_1^a x_2^b = \lambda a y = w_1 x_1 \rightarrow x_1^* = \lambda \frac{a y}{w_1}$$

$$\lambda b x_1^a x_2^b = \lambda b y = w_2 x_2 \rightarrow x_2^* = \lambda \frac{b y}{w_2}$$

Ainda não é a solução porque ainda tem o λ , que é endógeno. Substituindo na restrição:

$$\left(\frac{\lambda a y}{w_1}\right)^a \left(\frac{\lambda b y}{w_2}\right)^b = y \rightarrow \lambda = (a^{-a} b^{-b} w_1^a w_2^b y^{1-a-b})^{\frac{1}{a+b}}$$

Substituindo de volta na equação de x_1^* e x_2^* , obtemos a solução do problema : a demanda por fatores em função dos parâmetros exógenos w_1 , w_2 e y .

$$x_1(w_1, w_2, y) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} w_1^{-\frac{b}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$

$$x_2(w_1, w_2, y) = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{a}{a+b}} w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{-\frac{a}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$

- (c) A minimização de custos é condição necessária e suficiente para garantir a maximização de lucros. Essa afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique usando a resposta dos itens anteriores. Falsa. É necessária mas não é suficiente.

A minimização de custo não é suficiente porque não resolve o problema de escolher o nível ótimo de produção que maximiza o lucro. A solução do problema de minimização é a demanda por fatores em função de w e y . Já a solução da maximização de lucros é a demanda por fatores em função de w e p .

A minimização de custo é necessária porque resolve o problema do uso ótimo dos insumos para cada nível de produção. Note que ambos os problemas tem CPO parecidas, com λ no lugar de p . Nos dois casos a escolha ótima usa a tecnologia mais barata: segue a regra de que a TMST entre dois fatores é igual à razão entre seus preços.

16. Apresente uma função de produção f , um vetor de insumos z e preços de insumos w tais que z é a solução do problema de minimização de custo para um determinado nível de produto y , mas não faz parte da solução do problema de maximização de lucro da firma para nenhum preço do produto.

Qualquer tecnologia com retornos crescentes de escala. Por exemplo, a função de produção que usa o insumo z para produzir y seguindo $f(z) = z^2$.

17. Considere as seguintes funções de produção:

$$f(z) = z_1 + z_2$$

$$f(z) = \min\{z_1, z_2\}$$

$$f(z) = z_1^a z_2^b$$

- (a) Quais apresentam retornos constantes de escala? As duas primeiras apresentam, e a terceira também quando $a+b=1$.
- (b) Calcule a função custo e a demanda condicional por fatores para cada uma delas.

Tecnologia com (insumos) substitutos perfeitos, $y = f(z) = z_1 + z_2$:

$$z_1 = \begin{cases} y & \text{se } w_1 \leq w_2 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}; \quad z_2 = \begin{cases} y & \text{se } w_1 \geq w_2 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

$$C(w_1, w_2, y) = \min\{w_1 y, w_2 y\}$$

Tecnologia com (insumos) complementos perfeitos, $y = f(z) = \min\{z_1, z_2\}$:

$$\min\{z_1, z_2\} = y \rightarrow z_1 = z_2 = y$$

$$C(w_1, w_2, y) = (w_1 + w_2)y$$

Tecnologia Cobb-Douglas. Feito na questão 15(b). Só falta usar a solução para calcular a função custo: $C(w, y) = w_1 x_1^* + w_2 x_2^*$. Resolvendo fica:

$$c(w, y) = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{-a}{a+b}} \right] w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$

18. Considere uma firma com função de produção $f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$ e sejam w_1 o preço do fator 1, w_2 o preço do fator 2 e y o nível de produto.

- (a) Monte o problema de minimização de custos e obtenha as funções de demanda condicionadas de fatores no longo prazo.

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2 \quad \text{sujeito a } y = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$$

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2 + \lambda (x_1^{1/3} x_2^{2/3} - y)$$

$$x_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} w_1^{-2/3} w_2^{2/3} y$$

$$x_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/3} w_1^{1/3} w_2^{-1/3} y$$

- (b) Calcule a função custo no longo prazo.

$$c(w_1, w_2, y) = w_1 x_1 + w_2 x_2$$

$$c(w_1, w_2, y) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \right] w_1^{1/3} w_2^{2/3} y \rightarrow \text{rendimentos constantes de escala}$$

- (c) No curto prazo, o fator 2 está fixo de tal maneira que $\bar{x}_2 = 2^{7/3}$. Supondo $w_1 = w_2 = 1$, calcule o custo mínimo de produzir 4 unidades do produto no curto prazo.

$$x_1^{\frac{1}{3}} \left(2^{\frac{7}{3}}\right)^{2/3} = 4 \rightarrow x_1 = \left(\frac{4}{2^{\frac{14}{9}}}\right)^3 = \sim 2,46$$

$$c = x_1 + x_2 = 5,04 + 2,46 = 7,5$$

- (d) Verifique que o resultado obtido no item (c) é igual ao valor da função custo no longo prazo quando $w_1 = 1$, $w_2 = 1$ e $y = 4$. Por que isso ocorre?

$$c = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/3} \right] 4 = 1,89(4) = \sim 7,5$$

Isso ocorre porque $\bar{x}_2 = 2^{7/3}$ é a escolha ótima para produzir $y = 4$ quando a firma pode mudar x_1 e x_2 (no longo prazo). Substitua $\bar{x}_2 = 2^{7/3}$ na demanda condicionada de x_2 calculada em (a) para verificar.

19. Uma firma tem duas fábricas com função custo $c_1(y_1) = y_1^2/2$ e $c_2(y_2) = y_2$. Qual é a função custo da firma?

$$\min_{y_1, y_2} \frac{y_1^2}{2} + y_2 - \lambda(y_1 + y_2 - q)$$

$$\text{CPO: } (y_1) y_1 = \lambda; (y_2) 1 = \lambda \rightarrow y_1 = 1 \rightarrow y_2 = q - 1$$

$$c(q) = \begin{cases} \frac{q^2}{2} & \text{se } q \leq 1 \\ q - \frac{1}{2} & \text{se } q > 1 \end{cases}$$

20. Uma firma usa 4 insumos para produzir um produto. A função de produção é $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \min\{x_1, x_2\} + \min\{x_3, x_4\}$.

- (a) Qual é o vetor de demanda condicional por fatores para produzir 1 unidade de produto quando o vetor de preços é $w = (1, 2, 3, 4)$? $x = (1, 1, 0, 0)$

- (b) Qual é a função custo? $c(w, y) = \min\{w_1 + w_2, w_3 + w_4\} y$

- (c) Essa tecnologia tem que tipo de retornos de escala?

$$\text{Retornos constantes de escala: } f(tx_1, tx_2, tx_3, tx_4) = \min\{tx_1, tx_2\} + \min\{tx_3, tx_4\} = t[\min\{x_1, x_2\} + \min\{x_3, x_4\}] = tf(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

- (d) Uma outra firma tem função de produção $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \min\{x_1 + x_2, x_3 + x_4\}$. Como mudam as respostas anteriores?

$$x = (1, 0, 1, 0). c(w, y) = (\min\{w_1, w_2\} + \min\{w_3, w_4\}) y. \text{ Continua com retornos constantes de escala: } f(tx_1, tx_2, tx_3, tx_4) = \min\{t(x_1 + x_2), t(x_3 + x_4)\} = t[\min\{x_1 + x_2, x_3 + x_4\}] = tf(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

