

## ECO 1113 TEORIA MICROECONÔMICA I N

PROFESSOR: JULIANO ASSUNÇÃO

TURMA: 2JA

### LISTA 3

1. Indique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas e justifique suas respostas.
  - (a) Considere uma economia com apenas dois bens e dois indivíduos. O indivíduo 1 tem função de demanda inversa dada por  $P = P(q)$  e o indivíduo 2 tem função de demanda inversa dada por  $P' = P'(q)$ , em que  $P > P'$  para todo  $q$ . Considere também que a elasticidade-preço da demanda do consumidor 1 é menor que a do consumidor 2. Então a curva de demanda de mercado apresentará uma “quebra” em sua inclinação em  $P'(0)$ , onde a curva se tornará mais inclinada que a curva de demanda individual do consumidor 1. Falso. A curva de demanda (inversa) de mercado apresentará uma quebra quando o indivíduo 2 começa a consumir, em  $P'(0)$ , onde a curva se tornará menos inclinada (mais elástica) do que a curva de demanda individual do consumidor 1.
  - (b) Um produtor que enfrenta uma curva de demanda de mercado linear  $q(P) = a - bP$ , estará maximizando sua receita quando produzir  $q^* = a/2$ . Verdadeiro (veja 2.a).
  - (c) Se a demanda de mercado de um bem é dada por  $D(p) = R/p$ , quanto maior for  $R$ , mais elástica será a curva de demanda para um determinado preço. Falso.  $\varepsilon^p = dD(p)/dp * p/q = -R/(p^2) * p^2/R = -1$ . Elasticidade-preço da demanda não depende de  $R$  neste caso.
  - (d) Se a curva de demanda inversa for uma função linear  $p(q) = a - bq$ , então a receita marginal será  $RM = a - 2bq$ . Verdadeiro.  $R = p(q)q \rightarrow Rmg = p'(q)q + p(q) = -bq + a - bq$ .
  - (e) Em um modelo com dois bens, se um bem for inferior o outro tem que ser bem de luxo. Verdadeiro.  $s_1\varepsilon^r_1 + s_2\varepsilon^r_2 = 1$ , em que  $s_i$  é a proporção da renda gasta com o bem  $i$  e  $\varepsilon^r_i$  é a elasticidade-renda do bem  $i$ . Se o bem  $i$  é inferior  $|\varepsilon^r_i| < 1$ , então o outro bem tem que ser inferior.
2. Suponha que o mercado de bananas tenha a seguinte função de demanda:  $D(p) = a - bp$ ,  $b > 0$ .
  - (a) Calcule o preço ótimo para que a receita do mercado de bananas seja maximizada. Receita:  $R = q(p) * p = ap - bp^2$   
 $\max_p R \rightarrow \text{CPO: } a - 2bp = 0 \rightarrow p = a/2b \rightarrow q = a/2$
  - (b) Calcule a variação no excedente do consumidor se o preço encontrado na letra (a) for dobrado e reduzido a metade.
 
$$EC^0 = \left(\frac{a}{b} - \frac{a}{2b}\right) \frac{a}{4} = \frac{a^2}{8b}$$

$$\text{Dobro: } \left(p = \frac{a}{b}, q = 0\right) : EC' = 0 \rightarrow \Delta EC' = -\frac{a^2}{8b}$$

$$\text{Metade: } \left(p = \frac{a}{4b}, q = \frac{3a}{4}\right) : EC'' = \left(\frac{a}{b} - \frac{a}{4b}\right) \frac{3a}{8} = \frac{9a^2}{32b} \rightarrow \Delta EC'' = \frac{5a^2}{32b}$$

- (c) Qual a elasticidade-preço nos itens (a) e nas duas situações do item (b).

$$\varepsilon = \frac{\partial q}{\partial p} \frac{p}{q}$$

Item (a):  $\varepsilon = -b \frac{a/2}{2b/a} = -1$  (maximiza receita)

Dobro:  $\varepsilon = -b \frac{a/b}{0} \rightarrow \infty$  quando  $q \rightarrow 0^+$

Metade:  $\varepsilon = -b \frac{a/4}{4b/3a} = -\frac{1}{3}$

- (d) Repita o exercício se a função de demanda for  $D(p) = 1/p$ .

Não há um preço que maximiza a receita. A receita não depende do preço e a demanda tem elasticidade constante:

$$R = pD(p) = p \frac{1}{p} = 1$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{p^2} * p * p = -1$$

3. Dada uma curva de demanda de mercado  $D(p) = 100 - 0,5p$ :

- (a) Encontre sua curva de demanda inversa e o vetor preço e quantidade no ótimo.

$$q = 100 - 0,5p$$

$$p = \frac{100 - q}{0,5} = 200 - 2q$$

A curva de demanda inversa é  $P(q) = 200 - 2q$ .

O vetor preço e quantidade no ótimo será aquele  $(p, q) = (p^*, q^*)$  que maximiza a receita.

$$R = p * q = p(100 - 0,5q) = 100p - \frac{1}{2}p^2$$

$$\frac{dR}{dp} = 0 \rightarrow 100 = p$$

$$R = (200 - 2q)q = 200q - 2q^2$$

$$\frac{dR}{dq} = 0 \rightarrow q = 50$$

$$(p^*, q^*) = (100, 50)$$

- (b) Qual a variação do excedente do consumidor se dobrarmos o preço encontrado na letra a?

$$p' = 200$$

$$VEC = - \int_{100}^{200} 100 - \frac{1}{2}p \, dp = -2500$$

- (c) Para que trecho da curva teremos uma demanda elástica? E para demanda inelástica?

No ótimo  $\varepsilon = -1, p = 100, q = 50$

$$\varepsilon = \frac{p}{q} \frac{dq}{dp}$$

Para que a demanda seja elástica temos de ter  $\varepsilon < -1$  e para isso  $p > 100$ .

Para que a demanda seja inelástica temos de ter  $\varepsilon > -1$  e para isso  $p < 100$ .

4. Considere um mercado que tenha função de demanda inversa linear dada por

$$P(q) = 6 - q/2.$$

- (a) Qual a quantidade que maximiza a receita do produtor?  $q = 6$

- (b) Se o produtor operar na parte inelástica da curva, ele estará maximizando sua receita? Por quê? Não. Ele nunca vai operar na parte inelástica da curva porque a receita aumenta quando o preço aumenta. Seja a receita  $R(p) = p * q(p) \rightarrow R'(p) = q(p) + p * q'(p)$ .

A receita marginal é positiva quando  $\varepsilon = p/q * q'(p) > -1$  (inelástica):

$$R'(p) > 0 \rightarrow q(p)/q(p) + p*q'(p)/q(p) > 0 \rightarrow \varepsilon > -1.$$

\*Notação:  $q'(p) = dq(p)/dp$ .

5. Considere a função de demanda por abacates  $q = \alpha p^{-(\varepsilon+1)}(m-m^2)$  onde  $q$  é a demanda por abacates,  $p$  é o preço de um abacate e  $m$  é a renda do indivíduo.

- (a) Qual é a elasticidade-preço da demanda e qual deve ser o valor de  $\varepsilon$  para que essa demanda seja inelástica?

$$E_p = \frac{\partial q}{\partial p} * \frac{p}{q} = -(\varepsilon + 1)\alpha p^{-(\varepsilon+2)}(m - m^2) * \frac{p}{\alpha p^{-(\varepsilon+1)}(m - m^2)} = -(\varepsilon + 1)$$

A demanda será inelástica quando  $\varepsilon < 0$ .

- (b) Qual é a elasticidade-renda da demanda e a quais níveis de renda esse bem será inferior ou normal?

$$E_m = \frac{\partial q}{\partial m} * \frac{m}{q} = (1 - 2m)\alpha p^{-(\varepsilon+2)} * \frac{m}{\alpha p^{-(\varepsilon+1)}(m - m^2)} = \frac{1 - 2m}{1 - m}$$

$E_m > 0 \rightarrow$  bem normal,  $E_m < 0 \rightarrow$  bem inferior.

Abacates são um bem inferior para  $\frac{1}{2} < m < 1$ , e normal para  $m < \frac{1}{2}$  e  $m > 1$ .

6. Um mercado é formado por dois consumidores: A e B. A função de demanda do consumidor A é dada por  $q_A(p) = 20 - 4p$  e a função de demanda do consumidor B é dada por:  $q_B(p) = 10/p$  se  $p \leq 2$ ;  $q_B(p) = 0$  se  $p > 2$ .

- (a) Calcule as elasticidades-preço das demandas individuais quando  $p=1$ . A esse preço, qual dos consumidores tem a demanda mais elástica a preço?

$$\varepsilon_A^{p=1} = \frac{\partial q_A}{\partial p_A} * \frac{p_A}{q_A} = -4 * \frac{1}{16} = -\frac{1}{4}$$

$$\varepsilon_B^{p=1} = \frac{\partial q_B}{\partial p_B} * \frac{p_B}{q_B} = -10 * \frac{1}{10} = -1$$

- (b) Obtenha a demanda de mercado.

$$q(p) = \begin{cases} 20 - 4p + \frac{10}{p} & \text{se } p \leq 2 \\ 20 - 4 & \text{se } p > 2 \end{cases}$$

- (c) Calcule a elasticidade-preço da demanda de mercado quando  $p=1$ .

$$\varepsilon^{p=1} = \frac{\partial q}{\partial p} * \frac{p}{q} = -14 * \frac{1}{26} = -\frac{7}{13}$$

- (d) Comparando os resultados dos itens (a) e (c), o que é possível concluir sobre a relação entre a elasticidade-preço da demanda de mercado e as elasticidades-preço das demandas individuais? A elasticidade-preço da demanda de mercado é uma média das demandas individuais:  $\varepsilon = \alpha(\varepsilon_A) + (1 - \alpha)(\varepsilon_B)$ . \*A inclinação da demanda de mercado é a soma da inclinação das demandas individuais.

7. Indique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas e justifique suas respostas.

- (a) Uma isoquanta nunca pode apresentar uma inclinação ascendente, se todos os insumos apresentam produtividades marginais positivas. Verdadeiro.

- (b) Dizer que a tecnologia apresenta a propriedade de monotonicidade significa que a produção não diminui quando aumenta o uso de um fator. **Verdadeiro**.
- (c) Com  $y = f(x, y)$ , dizer que o produto marginal de  $x$  é decrescente significa que é negativo. **Falso**.
- (d) Se a tecnologia apresenta retornos decrescentes de escala, dobrar a quantidade dos insumos reduz o nível de produção. **Falso**.
- (e) Uma firma cujo produto é gerado por  $y = f(x) = 2x - 0,03x^2$  maximiza seus lucros quando  $x=20$ . Suponha que o preço unitário do produto é 10 e do insumo é 8. **Verdadeiro**.  
 $\max_x pf(x) - wx \rightarrow \text{CPO: } pf(x) = w$ . Usando  $f(x)$ ,  $p = 10$  e  $w = 8$ :  
 $10(2 - 0,06x) = 8 \rightarrow 20 - 0,6x = 8 \rightarrow x^* = 20$ .

8. Para cada um dos itens a seguir, analise se a função de produção apresenta rendimentos crescentes, constantes ou decrescentes de escala e verifique se o produto marginal do insumo 1 é decrescente.

a.  $f(x_1, x_2) = x_1^{0,7} x_2^{0,5}$

$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^{0,7} (tx_2)^{0,5} = t^{1,2} x_1^{0,7} x_2^{0,5} = t^{1,2} f(x_1, x_2)$$

$f(tx_1, tx_2) > tf(x_1, x_2) \rightarrow$  retornos crescentes de escala

$$PM_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{0,7x_2^{0,5}}{x_1^{0,3}} \rightarrow PM_1 \text{ é decrescente.}$$

b.  $f(x_1, x_2) = (ax_1^{0,5} + bx_2^{0,5})^2$ , com  $a$  e  $b > 0$

$$f(tx_1, tx_2) = (a(tx_1)^{0,5} + b(tx_2)^{0,5})^2 = \left(t^{0,5}(ax_1^{0,5} + bx_2^{0,5})\right)^2 = tf(x_1, x_2)$$

$f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2) \rightarrow$  retornos constantes de escala

$$PM_1 = a^2 + \frac{2abx_2^{0,5}}{x_1^{0,5}} \rightarrow PM_1 \text{ é decrescente}$$

c.  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$

$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^2 + tx_2 = t(tx_1^2 + x_2)$$

$f(tx_1, tx_2) > tf(x_1, x_2) \rightarrow$  retornos crescentes de escala

$$PM_1 = 2x_1 \rightarrow PM_1 \text{ é crescente}$$

d.  $f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2)^{0,5}$ , com  $a$  e  $b > 0$

$$f(tx_1, tx_2) = (atx_1 + btx_2)^{0,5} = (t(ax_1 + bx_2))^{0,5} = t^{0,5} f(x_1, x_2)$$

$f(tx_1, tx_2) < tf(x_1, x_2) \rightarrow$  retornos decrescentes de escala

$$PM_1 = \frac{1}{2\sqrt{x_1+x_2}} \rightarrow PM_1 \text{ é decrescente}$$

e.  $f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$ , com  $a$  e  $b > 0$

$$f(tx_1, tx_2) = \min\{atx_1, btx_2\} = \min\{ax_1, bx_2\}t$$

$f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2) \rightarrow$  retornos constantes de escala

$$PM_1 = \begin{cases} a \text{ se } ax_1 < bx_2 \rightarrow PM_1 \text{ é uma função decrescente} \\ 0 \text{ se } ax_1 \geq bx_2 \end{cases}$$

9. Um pipoqueiro utiliza milho ( $x_1$ ) e manteiga ( $x_2$ ) para produzir pipoca ( $y$ ) através da tecnologia  $y = f(x_1, x_2) = a \ln(x_1) + b \ln(x_2)$ . Suponha que os preços da pipoca, do milho e da manteiga sejam, respectivamente, ( $p, w_1, w_2$ ).

- (a) Qual é a produtividade marginal do milho e da manteiga para o pipoqueiro?

$$\text{milho: } PM_1 = \frac{a}{x_1}, \text{ manteiga: } PM_2 = \frac{b}{x_2}$$

- (b) Qual a Taxa Marginal de Substituição Técnica?

$$TMST = -\frac{PM_1}{PM_2} = -\frac{ax_2}{bx_1}$$

- (c) Expressse o problema de maximização de lucros do pipoqueiro.

$$\text{Produtor maximiza o lucro: } \max_{x_1, x_2} \pi = pf(x_1, x_2) - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

$$\text{Ou seja, } \max_{x_1, x_2} p * a \ln(x_1) + p * b \ln(x_2) - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

$$CPO: \frac{a}{x_1} = \frac{w_1}{p} \text{ e } \frac{b}{x_2} = \frac{w_2}{p}$$

- (d) Encontre as demandas pelos fatores milho e manteiga.

$$x_1 = \frac{pa}{w_1} \text{ e } x_2 = \frac{pb}{w_2}$$

- (e) Expressse o nível ótimo de produção de pipoca como função dos preços.

$$y^* = a \ln\left(\frac{pa}{w_1}\right) + b \ln\left(\frac{pb}{w_2}\right)$$

- (f) O que ocorre com a produção ótima se o preço do milho aumentar? E se o preço da pipoca subir? Diminui e aumenta, respectivamente.

10. Uma firma produz um bem  $Y$  utilizando a função de produção  $Y(L, K) = LK$ , sendo  $w=2$  e  $r=1$  os preços unitários dos insumos trabalho ( $L$ ) e capital ( $K$ ), respectivamente.

- a) Demonstre se os retornos de escala da função de produção são crescentes, decrescentes ou constantes.

$$Y(tL, tK) = tLtK = t^2 LK$$

$$tY(L, K) = t(LK) = tLK$$

$Y(tL, tK) > tY(L, K)$ , logo os retornos são crescentes de escala.

- b) Verifique as produtividades marginais para os insumos e demonstre se são crescentes, decrescentes ou constantes.

$$PM_L = K$$

$$\frac{dPM_L}{dL} = 0, \text{ logo a Produtividade Marginal de } L \text{ é constante.}$$

$$PM_K = L$$

$$\frac{dPM_K}{dK} = 0, \text{ logo a Produtividade Marginal de } K \text{ é constante.}$$

- c) Tendo em vista os rendimentos de escala da função de produção, o que podemos observar sobre as demandas dos insumos?

Como os rendimentos da função são crescentes de escala, não é possível definir um nível de demanda ótima para os insumos uma vez que tenderão ao infinito. Como cada unidade de insumo a mais investida na produção gera uma quantidade crescente de produto, a firma estará sempre querendo mais insumos para produzir ainda mais.

11. Suponha que a tecnologia de produção do bem  $Y$  é dada por  $f(K, L) = 600K^2L^2 - K^3L^3$ , supondo que a quantidade disponível do insumo  $K$  é igual a 10 unidades. Nessas circunstâncias:

- a) Encontre a quantidade do insumo  $L$  que maximiza a função de produção no curto prazo.

$$\text{Máx}_L f(10, L) = 600 * 10^2 L^2 - 10^3 L^3$$

$$\frac{df}{dL} = 0 \rightarrow 120.000 * L - 3000 * L^2 = 0$$

$L^* = 0$  ou  $40$ , no entanto se testarmos  $L=0$  teremos  $Y=0$ , o que indica que  $L=0$  não nos dá ponto de máximo. Visto isso temos que  $L^*=40$ .

b) Indique se a produtividade marginal do  $L$  é crescente, decrescente ou constante.

$$PM_L = 1200K^2L - 3K^3L^2$$

$$\frac{dPM_L}{dL} = 1200K^2 - 6K^3L$$

$PM_L$  é crescente para valores de  $L < \frac{200}{K}$  e mais especificamente para  $\bar{K} = 10$ ,  $L < 20$ .

$PM_L$  é decrescente para  $L > \frac{200}{K}$  e mais especificamente para  $\bar{K} = 10$ ,  $L > 20$ .

c) Desfazendo-nos da restrição de que  $K=10$ , mostre se os rendimentos são constantes, crescentes ou decrescentes de escala.

$$f(tK, tL) = 600K^2t^2L^2t^2 - K^3t^3L^3t^3 = 600K^2L^2t^4 - K^3L^3t^6$$

$$tf(K, L) = t(600K^2L^2 - K^3L^3) = 600K^2L^2t - K^3L^3t$$

$$f(tK, tL) - tf(K, L) = 600K^2L^2(t^4 - t) - K^3L^3(t^6 - t)$$

para facilitar a observação do sinal de  $f(tK, tL) - tf(K, L)$  vamos dividir tudo por  $K^2L^2(t^4 - t)$ :

$$600 - KL \frac{(t^6 - t)}{(t^4 - t)}$$

Logo os rendimentos serão crescentes de escala enquanto  $KL \frac{(t^6 - t)}{(t^4 - t)} < 600$  e passarão a ser decrescentes de escala para  $KL \frac{(t^6 - t)}{(t^4 - t)} > 600$ .

d) Encontre a Taxa Técnica de Substituição para essa função de produção. Interprete economicamente a TTS.

$$TTS = -\frac{PM_K}{PM_L} = -\frac{1200KL^2 - 3K^2L^3}{1200K^2L - 3K^3L^2} = -\frac{1200L - 3KL^2}{1200K - 3K^2L} = -\frac{L}{K}$$

A TTS representa quanto a mais de  $L$  precisamos ganhar para abrirmos mão de uma quantidade de  $K$ .

12. Considere a função de produção Cobb-Douglas  $f(x, y) = Ax^a y^b$ .

(a) O tipo de rendimento de escala dessa função irá depender da grandeza de  $a+b$ . Que valores de  $a+b$  estão associados aos diferentes tipos de rendimento de escala?

Se  $a+b < 1$ , rendimentos serão decrescentes de escala.

Se  $a+b=1$ , rendimentos serão constantes de escala.

Se  $a+b > 1$ , rendimentos serão crescentes de escala.

(b) Determine a produtividade marginal da função produção para  $x$  e para  $y$ . Para  $A > 0$ , indique quais serão os valores dos parâmetros que garantirão produtividades marginais decrescentes.

$$PM_x = Aax^{a-1}y^b$$

$$\frac{dPM_x}{dx} < 0 \rightarrow Aa(a-1)x^{a-2}y^b < 0$$

Para que a desigualdade seja respeitada, precisamos ter que  $a(a-1) < 0$  e para tanto  $a \in (0, 1)$ .

$$PM_y = Abx^a y^{b-1}$$

$$\frac{dPM_y}{dy} < 0 \rightarrow Ab(b-1)x^a y^{b-2} < 0$$

Para que a desigualdade seja respeitada, precisamos ter que  $b(b-1) < 0$  e para tanto  $b \in (0, 1)$ .

(c) Sendo  $a=b=1$  e  $A=2$ , determine a inclinação da isoquanta e a interprete economicamente.

A inclinação da isoquanta corresponde a Taxa Técnica de Substituição.

$$TTS = -\frac{PM_x}{PM_y} = -\frac{Aax^{a-1}y^b}{Abx^a y^{b-1}} = -\frac{2 * 1y}{2 * 1x} = -\frac{y}{x}$$

A TTS representa quanto a mais de  $y$  precisamos ganhar para abrirmos mão de uma quantidade de  $x$ .

13. Uma firma tem a função de produção  $f(L, K) = L^{0,5}K$ , em que  $L$  denota o fator trabalho e  $K$  o fator capital. Considere que o preço do bem produzido é 10, que o preço do trabalho é 1 e que o preço do capital é 1.

(a) No curto prazo, a firma não pode ajustar o capital, que é fixo em  $K=2$ . Obtenha a quantidade demandada de trabalho que maximiza o lucro no curto prazo.

$$\max_L 20L^{0,5} - L - 2$$

$$\text{CPO: } 10L^{0,5} = 1 \rightarrow L = 100$$

(b) No longo prazo, a firma pode ajustar o capital. Mostre que  $(\hat{L}, \hat{K})$  em que  $\hat{L} = 10^{-2}$  e  $\hat{K} = 2 \cdot 10^{-2}$ , atende às condições de primeira ordem para maximização do lucro no longo prazo.

$$\max_{L,K} 10L^{0,5}K - L - K$$

$$\text{CPO: } \begin{cases} 5L^{-0,5}K = 1 \\ 10L^{0,5} = 1 \end{cases} \rightarrow L = 0,01, K = 0,02$$

(c) Mostre que  $(\hat{L}, \hat{K})$ , em que  $\hat{L} = 10^{-2}$  e  $\hat{K} = 2 \cdot 10^{-2}$  não maximiza o lucro no longo prazo. Exemplo: maior lucro com  $L=100$  e  $K=100$ ...

(d) Existe alguma escolha  $(\hat{L}, \hat{K})$  que maximiza o lucro no longo prazo? Não. A tecnologia de produção tem retornos crescentes de escala. Sem levar em conta limitações de demanda, a firma sempre prefere produzir mais usando  $f(tx_1, tx_2)$ ,  $t > 1$ .

14. Uma empresa faz duas escolhas para dois conjuntos diferentes de preço. No período  $t$ , ela enfrenta os preços  $(p^t, w_1^t, w_2^t)$  e faz as escolhas  $(y^t, x_1^t, x_2^t)$ . No período  $s$ , ela enfrenta os preços  $(p^s, w_1^s, w_2^s)$  e faz as escolhas  $(y^s, x_1^s, x_2^s)$ . Sendo  $y^t = y^s$ , se essa firma mantém a mesma função de produção nos dois períodos, e considerando que ela seja maximizadora de lucro, prove que a soma das produtividades das variações dos preços dos fatores pelas variações de suas respectivas demandas não pode ser maior que zero e explique.

Por Lucratividade Revelada:

$$p^t y^t - w_1^t x_1^t - w_2^t x_2^t \geq p^t y^t - w_1^s x_1^s - w_2^s x_2^s$$

$$p^s y^t - w_1^s x_1^s - w_2^s x_2^s \geq p^s y^t - w_1^t x_1^t - w_2^t x_2^t$$

Como a Receita da firma é a mesma dos dois lados das desigualdades, nós a cortamos e passamos a ter relações de custos:

$$\begin{aligned} +w_1^t x_1^t + w_2^t x_2^t &\leq +w_1^s x_1^s + w_2^s x_2^s \\ +w_1^s x_1^s + w_2^s x_2^s &\leq +w_1^t x_1^t + w_2^t x_2^t \end{aligned}$$

Vamos passar tudo para um lado das desigualdades e somá-las:

$$+w_1^t x_1^t + w_2^t x_2^t - w_1^t x_1^s - w_2^t x_2^s + w_1^s x_1^s + w_2^s x_2^s - w_1^s x_1^t - w_2^s x_2^t \leq 0$$

Evidenciando:

$$(w_1^s - w_1^t)(x_1^s - x_1^t) + (w_2^s - w_2^t)(x_2^s - x_2^t) \leq 0$$

E colocando em termos de variações:

$$\Delta w_1 \Delta x_1 + \Delta w_2 \Delta x_2 \leq 0$$

Fica provado, portanto, que a soma dos produtos das variações dos preços dos fatores pelas variações de suas respectivas demandas só pode ser menor ou igual a zero, ou seja, não pode ser maior que zero.

Com isso podemos ver que sendo a firma maximizadora de lucros, ela também precisará ser minimizadora de custos. Dada uma determinada receita, a firma escolherá seus insumos de forma a que eles tenham o menor custo para produzir a quantidade desejada.

15. Contas com Cobb-Douglas. Considere uma firma que produz o produto  $y$  através da função de produção  $f(x) = x_1^a x_2^b$ . Seja  $w_1$  e  $w_2$  o preço dos fatores e  $p$  o preço do produto final.

(a) Monte o problema de maximização de lucros da firma. Calcule a TMST. Encontre a solução do problema. (Baseado no apêndice do cap.19 do Varian)

$$\Pi(p, w) = \max_{x_1, x_2} p f(x_1, x_2) - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

$$\max_{x_1, x_2} p x_1^a x_2^b - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

$$\text{CPO: } \begin{cases} (x_1) p \frac{df(x_1, x_2)}{dx_1} = p a x_1^{a-1} x_2^b = w_1 \\ (x_2) p \frac{df(x_1, x_2)}{dx_2} = p b x_1^a x_2^{b-1} = w_2 \end{cases}$$

$$\text{TMST} = - \frac{a x_1^{a-1} x_2^b}{b x_1^a x_2^{b-1}} = - \frac{w_1}{w_2}$$

Multiplicando  $(x_1)$  por  $x_1$  e  $(x_2)$  por  $x_2$ :

$$\begin{aligned} p a x_1^a x_2^b &= p a y = w_1 x_1 \rightarrow x_1^* = p \frac{a y}{w_1} \\ p b x_1^a x_2^b &= p b y = w_2 x_2 \rightarrow x_2^* = p \frac{b y}{w_2} \end{aligned}$$

Ainda não é a solução porque ainda tem o  $y$ , que é endógeno. Substituindo em  $f(x_1, x_2)$ :

$$\left( \frac{p a y}{w_1} \right)^a \left( \frac{p b y}{w_2} \right)^b = y \rightarrow \left( \frac{p a}{w_1} \right)^a \left( \frac{p b}{w_2} \right)^b y^{a+b} = y$$

Isolando o  $y$  encontramos a oferta da firma e a solução do problema em função dos parâmetros exógenos do modelo,  $w_1, w_2$  e  $p$ :

$$y = \left( \frac{p a}{w_1} \right)^{\frac{a}{1-a-b}} \left( \frac{p b}{w_2} \right)^{\frac{b}{1-a-b}}$$

A demanda pelos fatores é facilmente calculada substituindo  $y$  de volta na equação de  $x_1^*$  e  $x_2^*$ .

- (b) Monte o problema de minimização de custo da firma. Calcule a TMST. Encontre a solução do problema. (Baseado no apêndice do cap.20 do Varian)

$$C(y, w) = \min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2 \text{ s. a. } f(x_1, x_2) = y$$

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2 - \lambda(x_1^a x_2^b - y)$$

$$\text{CPO: } \begin{cases} (x_1) \lambda \frac{df(x_1, x_2)}{dx_1} = \lambda a x_1^{a-1} x_2^b = w_1 \\ (x_2) \lambda \frac{df(x_1, x_2)}{dx_2} = \lambda b x_1^a x_2^{b-1} = w_2 \\ (\lambda) x_1^a x_2^b = y \end{cases}$$

$$\text{TMST} = -\frac{ax_1^{a-1}x_2^b}{bx_1^a x_2^{b-1}} = -\frac{w_1}{w_2}$$

Multiplicando  $(x_1)$  por  $x_1$  e  $(x_2)$  por  $x_2$ :

$$\begin{aligned} \lambda a x_1^a x_2^b &= \lambda a y = w_1 x_1 \rightarrow x_1^* = \lambda \frac{ay}{w_1} \\ \lambda b x_1^a x_2^b &= \lambda b y = w_2 x_2 \rightarrow x_2^* = \lambda \frac{by}{w_2} \end{aligned}$$

Ainda não é a solução porque ainda tem o  $\lambda$ , que é endógeno. Substituindo na restrição:

$$\left(\frac{\lambda a y}{w_1}\right)^a \left(\frac{\lambda b y}{w_2}\right)^b = y \rightarrow \lambda = (a^{-a} b^{-b} w_1^a w_2^b y^{1-a-b})^{\frac{1}{a+b}}$$

Substituindo de volta na equação de  $x_1^*$  e  $x_2^*$ , obtemos a solução do problema : a demanda por fatores em função dos parâmetros exógenos  $w_1$ ,  $w_2$  e  $y$ .

$$\begin{aligned} x_1(w_1, w_2, y) &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} w_1^{\frac{-b}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}} \\ x_2(w_1, w_2, y) &= \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{a}{a+b}} w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{-a}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}} \end{aligned}$$

- (c) A minimização de custos é condição necessária e suficiente para garantir a maximização de lucros. Essa afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique usando a resposta dos itens anteriores. **Falsa. É necessária mas não é suficiente.**

A minimização de custo não é suficiente porque não resolve o problema de escolher o nível ótimo de produção que maximiza o lucro. A solução do problema de minimização é a demanda por fatores em função de  $w$  e  $y$ . Já a solução da maximização de lucros é a demanda por fatores em função de  $w$  e  $p$ .

A minimização de custo é necessária porque resolve o problema do uso ótimo dos insumos para cada nível de produção. Note que ambos os problemas tem CPO parecidas, com  $\lambda$  no lugar de  $p$ . Nos dois casos a escolha ótima usa a tecnologia mais barata: segue a regra de que a TMST entre dois fatores é igual à razão entre seus preços.

16. Apresente uma função de produção  $f$ , um vetor de insumos  $z$  e preços de insumos  $w$  tais que  $z$  é a solução do problema de minimização de custo para um determinado nível de produto  $y$ , mas não faz parte da solução do problema de maximização de lucro da firma para nenhum preço do produto.

Qualquer tecnologia com retornos crescentes de escala. Por exemplo, a função de produção que usa o insumo  $z$  para produzir  $y$  seguindo  $f(z) = z^2$ .

17. Considere as seguintes funções de produção:

$$f(z) = z_1 + z_2$$

$$f(z) = \min\{z_1, z_2\}$$

$$f(z) = z_1^a z_2^b$$

(a) Quais apresentam retornos constantes de escala? As duas apresentam, e a terceira também quando  $a+b=1$ .

(b) Calcule a função custo e a demanda condicional por fatores para cada uma delas.

Tecnologia com (insumos) substitutos perfeitos,  $y = f(z) = z_1 + z_2$ :

$$z_1 = \begin{cases} y & \text{se } w_1 \leq w_2 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}; z_2 = \begin{cases} y & \text{se } w_1 \geq w_2 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

$$C(w_1, w_2, y) = \min\{w_1 y, w_2 y\}$$

Tecnologia com (insumos) complementos perfeitos,  $y = f(z) = \min\{z^1, z^2\}$ :

$$\min\{z_1, z_2\} = y \rightarrow z_1 = z_2 = y$$

$$C(w_1, w_2, y) = (w_1 + w_2)y$$

Tecnologia Cobb-Douglas. Feito na questão 15(b). Só falta usar a solução para calcular a função custo:  $C(w, y) = w_1 x_1^* + w_2 x_2^*$ . Resolvendo fica:

$$c(w, y) = \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{b}{a+b}} + \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{-a}{a+b}} \right] w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$

18. Considere uma firma com função de produção  $f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$  e sejam  $w_1$  o preço do fator 1,  $w_2$  o preço do fator 2 e  $y$  o nível de produto.

(a) Monte o problema de minimização de custos e obtenha as funções de demanda condicionadas de fatores no longo prazo.

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2 \text{ sujeito a } y = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$$

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2 + \lambda (x_1^{1/3} x_2^{2/3} - y)$$

$$x_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} w_1^{-2/3} w_2^{2/3} y$$

$$x_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/3} w_1^{1/3} w_2^{-1/3} y$$

(b) Calcule a função custo no longo prazo.

$$c(w_1, w_2, y) = w_1 x_1 + w_2 x_2$$

$$c(w_1, w_2, y) = \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \right] w_1^{\frac{1}{3}} w_2^{\frac{2}{3}} y \rightarrow \text{rendimentos constantes de escala}$$

(c) No curto prazo, o fator 2 está fixo de tal maneira que  $\bar{x}_2 = 2^{7/3}$ . Supondo  $w_1 = w_2 = 1$ , calcule o custo mínimo de produzir 4 unidades do produto no curto prazo.

$$x_1^{\frac{1}{3}} \left(2^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} = 4 \rightarrow x_1 = \left(\frac{4}{2^{\frac{14}{9}}}\right)^3 = \sim 2,46$$

$$c = x_1 + x_2 = 5,04 + 2,46 = 7,5$$

(d) Verifique que o resultado obtido no item (c) é igual ao valor da função custo no longo prazo quando  $w_1 = 1$ ,  $w_2 = 1$  e  $y = 4$ . Por que isso ocorre?

$$c = \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \right] 4 = 1,89(4) = \sim 7,5$$

Isso ocorre porque  $\bar{x}_2 = 2^{7/3}$  é a escolha ótima para produzir  $y = 4$  quando a firma pode mudar  $x_1$  e  $x_2$  (no longo prazo). Substitua  $\bar{x}_2 = 2^{7/3}$  na demanda condicionada de  $x_2$  calculada em (a) para verificar.

19. Uma firma tem duas fábricas com função custo  $c_1(y_1) = y_1^2/2$  e  $c_2(y_2) = y_2$ . Qual é a função custo da firma?

$$\min_{y_1, y_2} \frac{y_1^2}{2} + y_2 - \lambda(y_1 + y_2 - q)$$

$$\text{CPO: } (y_1) y_1 = \lambda; (y_2) 1 = \lambda \rightarrow y_1 = 1 \rightarrow y_2 = q - 1$$

$$c(q) = \begin{cases} \frac{q^2}{2} \text{ se } q \leq 1 \\ q - \frac{1}{2} \text{ se } q > 1 \end{cases}$$

20. Uma firma usa 4 insumos para produzir um produto. A função de produção é  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \min\{x_1, x_2\} + \min\{x_3, x_4\}$ .

(a) Qual é o vetor de demanda condicional por fatores para produzir 1 unidade de produto quando o vetor de preços é  $w = (1, 2, 3, 4)$ ?  $x = (1, 1, 0, 0)$

(b) Qual é a função custo?  $c(w, y) = \min\{w_1 + w_2, w_3 + w_4\}y$

(c) Essa tecnologia tem que tipo de retornos de escala?

Retornos constantes de escala:  $f(tx_1, tx_2, tx_3, tx_4) = \min\{tx_1, tx_2\} + \min\{tx_3, tx_4\} = t[\min\{x_1, x_2\} + \min\{x_3, x_4\}] = tf(x_1, x_2, x_3, x_4)$

(d) Uma outra firma tem função de produção  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \min\{x_1 + x_2, x_3 + x_4\}$ . Como mudam as respostas anteriores?

$x = (1, 0, 1, 0)$ .  $c(w, y) = (\min\{w_1, w_2\} + \min\{w_3, w_4\})y$ . Continua com retornos constantes de escala:  $f(tx_1, tx_2, tx_3, tx_4) = \min\{t(x_1 + x_2), t(x_3 + x_4)\} = t[\min\{x_1 + x_2, x_3 + x_4\}] = tf(x_1, x_2, x_3, x_4)$ .

