CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

ECO 1113 TEORIA MICROECONÔMICA I

PROFESSOR: JULIANO ASSUNÇÃO TURMA: 2JA

Maximização de Lucro - Gabarito

2019

Questão 1:

Um pipoqueiro utiliza milho (x_1) e manteiga (x_2) para produzir pipoca (y) através da tecnologia $y = f(x_1, x_2) = a.ln(x_1) + b.ln(x_2)$. Suponha que os preços da pipoca, do milho e da manteiga sejam, respectivamente, (p, w_1, w_2).

(a) Qual é a produtividade marginal do milho e da manteiga para o pipoqueiro?

(b) Qual a Taxa Marginal de Substituição Técnica?

(c) Expresse o problema de maximização de lucros do pipoqueiro.

(d) Encontre as demandas pelos fatores milho e manteiga.

(e) Expresse o nível ótimo de produção de pipoca como função dos preços.

(f) O que ocorre com a produção ótima se o preço do milho aumentar? E se o preço da pipoca subir?

R:

a) Produtividade Marginal:

Milho:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{a}{x_1}$$

Manteiga:

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{b}{x_2}$$

b)

$$TMST = -\frac{\partial y/\partial x_1}{\partial y/\partial x_2} = -\frac{a/x_1}{b/x_2} = -\frac{ax_2}{bx_1}$$

c)

$$\max_{x_1,x_2} py - w_1x_1 - w_2x_2$$

$$\max_{x_1,x_2} \; p(a.ln(x_1) + b.ln(x_2)) - w_1x_1 - w_2x_2$$

d) Resolvendo a maximização:

CPOs:

$$x_1 : \; \frac{pa}{x_1} - w_1 = 0 \qquad\qquad x_2 : \; \frac{pb}{x_2} - w_2 = 0$$

$$x_1^* = \frac{pa}{w_1} \qquad\qquad x_2^* = \frac{pb}{w_2}$$

e) Nível ótimo de produção:

$$\begin{aligned} y* &= f(x_1^*, x_2^*) = a.ln(x_1^*) + b.ln(x_2^*) \\ &= a.ln\left(\frac{pa}{w_1}\right) + b.ln\left(\frac{pb}{w_2}\right) \end{aligned}$$

f) Variação de y^* com variações de w_1 e p:

Aumento do preço do milho ($\uparrow w_1$):

$$\frac{\partial y}{\partial w_1} = \frac{a}{pa/w_1}\left(= \frac{pa}{w_1^2}\right) = -\frac{w_1 a}{w_1^2} = -\frac{a}{w_1} < 0$$

$\longrightarrow$ Com um aumento do preço do milho, a quantidade ótima produzida cai.

Aumento do preço da pipoca ($\uparrow p$):

$$\frac{\partial y}{\partial p} = \frac{a}{pa/w_1}\frac{a}{w_1} + \frac{b}{pb/w_2}\frac{b}{w_2} = \frac{a+b}{p} > 0$$

$\longrightarrow$ Com um aumento do preço da pipoca, a quantidade ótima produzida aumenta.

Questão 2:

Uma firma produz um bem Y utilizando a função de produção $Y(L,K) = LK$, sendo $w = 2$ e $r = 1$ os preços unitários dos insumos trabalho (L) e capital (K), respectivamente.

(a) Demonstre se os retornos de escala da função de produção são crescentes, decrescentes ou constantes.

(b) Verifique as produtividades marginais para os insumos e demonstre se são crescentes, decrescentes ou constantes.

(c) Tendo em vista os rendimentos de escala da função de produção, o que podemos observar sobre as demandas dos insumos?

R:

a) Retornos de Escala:

$$
\begin{aligned}
Y(tL, tK) &= (tL)(tK) = t^2 LK \\
&> tY(LK), \qquad \forall\, t > 1
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$ Retornos crescentes de escala.

b) PMg:

K:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = L \qquad\qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = 0$$

$\longrightarrow$ Retorno marginal do capital é constante e igual a L.

L:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = K \qquad\qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = 0$$

$\longrightarrow$ Retorno marginal do trabalho é constante e igual a K.

c) Como temos retornos crescentes de escala, quanto mais aumenta a produção, menor é a utilização de insumos por unidade produzida. Dessa forma, se o preço do produto for dado, a empresa sempre terá incentivo a aumentar a produção, e, consequentemente, sua demanda por insumos.

Questão 3:

Suponha que a tecnologia de produção do bem Y é dada por $f(K, L) = 600K^2L^2 - K^3L^3$, supondo que a quantidade disponível do insumo K é igual a 10 unidades. Nessas circunstâncias:

(a) Encontre a quantidade do insumo L que maximiza a função de produção no curto prazo.

(b) Indique se a produtividade marginal do L é crescente, decrescente ou constante.

(c) Desfazendo-nos da restrição de que K=10, mostre se os rendimentos são constantes, crescentes ou decrescentes de escala.

(d) Encontre a Taxa Técnica de Substituição para essa função de produção. Interprete economicamente a TTS.

R:

a) Com $\overline{K} = 10$ (curto prazo):

$$\max_L \ 600.10^2.L^2 - 10^3L^3$$

CPO:

$$1200.10^2L - 3.10^3L^2 = 0$$
$$L = \frac{1200.10^2}{3.10^3} = 40$$

b)

$$PMg_L = \frac{d\,f(\overline{K},L)}{dL} = 1200.10^2.L - 3.10^3L^2$$
$$PMg_L' = \frac{dPMg_L}{dL} = 1200.10^2 - 6.10^3.L = \begin{cases} > 0, & L < \frac{1200.10^2}{6.10^3} = 20 \\ < 0 & L > 20 \end{cases}$$

A produtividade marginal de L é crescente quando $L < 20$ e passa a ser decrescente quando $L > 20$.

c) Rendimentos de escala no longo prazo:

$$\begin{aligned} f(tK,tL) &= 600(tK)^2(tL)^2 - (tK)^3(tL)^3 \\ &= t^4 600K^2L^2 - t^6K^3L^3 \\ &= t600K^2L^2 - tK^3L^3 + (t^4-t)600K^2L^2 - (t^6-t)K^3L^3 \\ &= tf(K,L) + (t^4-t)600K^2L^2 - (t^6-t)K^3L^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Para\ \ t(tK,tL) > tf(K,L) \quad \longrightarrow \quad & (t^4-t)600K^2L^2 - (t^6-t)K^3L^3 > 0 \\ & (t^4-t)600 - (t^6-t)KL > 0 \\ & (t^4-t)600 > (t^6-t)KL \end{aligned}$$

Assim, teremos retornos de escala:

$$crescentes\ se\ \ KL < \frac{(t^4-t)600}{(t^6-t)}$$
$$decrescentes\ se\ \ KL > \frac{(t^4-t)600}{(t^6-t)}$$

d)

$$\begin{aligned} TTS = -\frac{\partial Y/\partial K}{\partial Y/\partial L} &= -\frac{1200KL^2 - 3K^2L^3}{1200K^2L - 3K^3L^2} \\ &= -\frac{1200L - 3KL^2}{1200K - 3K^2L} \end{aligned}$$

A TTS representa a variação marginal de trabalho (L) que precisamos ter para produzirmos a mesma quantidade de Y com uma variação marginal de capital (K).

Questão 4:

Considere a função de produção Cobb-Douglas $f(x, y) = Ax^a y^b$.

(a) O tipo de rendimento de escala dessa função dependerá da grandeza de $a + b$. Que valores de $a + b$ estão associados a que tipos de rendimento de escala?

(b) Determine a produtividade marginal da função de produção para x e para y. Para $A > 0$, indique para quais valores dos parâmetros as produtividades marginais serão decrescentes.

(c) Sendo $a = b = 1$ e $A = 2$, determine a inclinação da isoquanta e a interprete economicamente.

R:

a) Rendimentos de escala:

$$f(tx, ty) = A(tx)^a(ty)^b = t^{a+b}Ax^a y^b$$

$$se\ a + b = 1 \quad \longrightarrow \quad retornos\ constantes\ de\ escala$$

$$f(tx, ty) = tAx^a y^b = tf(x, y)$$

$$se\ a + b > 1 \quad \longrightarrow \quad retornos\ crescentes\ de\ escala$$

$$f(tx, ty) = t^{a+b}Ax^a y^b > tf(x, y)$$

$$se\ a + b < 1 \quad \longrightarrow \quad retornos\ decrescentes\ de\ escala$$

$$f(tx, ty) = t^{a+b}Ax^a y^b < tf(x, y)$$

b) PMg_x:

$$PMg_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = aAx^{a-1}y^b \qquad PMg'_x = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = a(a-1)Ax^{a-2}y^b$$

A produtividade marginal de x será decrescente se $a(a - 1) < 0$:

$$a(a-1) < 0 \quad \longrightarrow \quad a^2 - a < 0 \quad \longrightarrow \quad a^2 < a \quad \longrightarrow \quad a \in (0, 1)$$

PMg_y:

$$PMg_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = bAx^a y^{b-1} \qquad PMg'_y = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = b(b-1)Ax^a y^{b-2}$$

A produtividade marginal de y será decrescente se $b(b-1) < 0$:

$$b(b-1) < 0 \quad \longrightarrow \quad b^2 - b < 0 \quad \longrightarrow \quad b^2 < b \quad \longrightarrow \quad b \in (0,1)$$

c) A inclinação da isoquanta é a taxa marginal de transformação técnica:

$$\begin{aligned} TMST &= -\frac{\partial f(x,y)/\partial x}{\partial f(x,y)/\partial y} = -\frac{aAx^{a-1}y^b}{bAx^a y^{b-1}} \\ (a = b = 1 \ e \ A = 2): \qquad &= -\frac{y}{x} \end{aligned}$$

Para continuarmos produzindo a mesma quantidade com uma diminuição de 1 unidade de y, precisamos aumentar x em y/x.

Questão 5:

Uma firma tem a função de produção $f(L,K) = L^{0,5}K$, em que L denota o fator trabalho e K o fator capital. Considere que o preço do bem produzido é 10, que o preço do trabalho é 1 e que o preço do capital é 1.

(a) No curto prazo, a firma não pode ajustar o capital, que é fixo em $K = 2$. Obtenha a quantidade demandada de trabalho que maximiza o lucro no curto prazo.

(b) No longo prazo, a firma pode ajustar o capital. Mostre que $(\hat{L}, \hat{K})$ em que $\hat{L} = 10^{-2}$ e $\hat{K} = 2.10^{-2}$, atende às condições de primeira ordem para maximização do lucro no longo prazo.

(c) Mostre que $(\hat{L}, \hat{K})$, em que $\hat{L} = 10^{-2}$ e $\hat{K} = 2.10^{-2}$ não maximiza o lucro no longo prazo.

(d) Existe alguma escolha $(\hat{L}, \hat{K})$ que maximiza o lucro no longo prazo?

R:

a) Curto Prazo: $\overline{K} = 2$

$$\max \Pi = \max pf(L, \overline{K}) - wL - r\overline{K} = \max 10 \times 2 \times L^{0,5} - L - 2$$

CPO:

$$0,5 \times 20 \times L^{-0,5} - 1 = 0$$
$$\frac{10}{\sqrt{L}} = 1 \qquad \longrightarrow \qquad L = 100$$

b) Longo Prazo:

$$\max 10KL^{0,5} - L - K$$

CPOs:

$$\begin{aligned} K: &\qquad 10L^{0,5} - 1 = 0 \\ L: &\qquad 5KL^{-0,5} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Substituindo $\hat{L}$ e $\hat{K}$ nas duas CPOs:

$$\begin{aligned} K: &\qquad 10 \times (10^{-2})^{0,5} - 1 = 0 \qquad \longrightarrow 10 \times 10^{-1} - 1 = 0 \qquad \longrightarrow 1 - 1 = 0 \\ L: &\qquad 5 \times (2 \times 10^{-2}) \times (10^{-2})^{-0,5} - 1 = 0 \qquad \longrightarrow 10 \times 10^{-2} \times 10 - 1 = 0 \qquad \longrightarrow 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Ou seja $\hat{L}$ e $\hat{K}$ satisfazem as duas condições de primeira ordem.

c) $\hat{L}$ e $\hat{K}$ não maximiza lucro no longo prazo. Para provar isso, vamos primeiro encontrar o lucro nesse ponto:

$$\Pi = 10KL^{0,5} - L - K = 10 \times (2 \times 10^{-2}) \times (10^{-2})^{0,5} - 2 \times 10^{-2} - 10^{-2} = -10^{-2}$$

Porém, se escolhermos $K = L = 0$ teríamos um lucro:

$$\Pi = 10KL^{0,5} - L - K = 10 \times 0 \times 0^{0,5} - 0 - 0 = 0$$

Ou seja, $\hat{L}$ e $\hat{K}$ não maximiza lucro no longo prazo.

d) Não existe uma escolha de K e L que maximiza o lucro no longo prazo pois temos retornos crescentes de escala!

$$f(tL, tK) = (tL)^{0,5}(tK) = t^{1,5}L^{0,5}K > tf(L, K)$$

Assim, não terá uma produção ótima no longo prazo e sempre irá querer produzir mais:

$$\begin{aligned} \Pi(tL, tK) &= t^{1,5}L^{0,5}K - tL - tK \\ &= tL^{0,5}K - tL - tK + (t^{1,5} - t)L^{0,5}K \\ &= t\Pi(L, K) + (t^{1,5} - t)L^{0,5}K \\ &> t\Pi(L, K) \end{aligned}$$

Questão 6:

Uma empresa faz duas escolhas para dois conjuntos diferentes de preço. No período t, ela enfrenta os preços (p^t, w_1^t, w_2^t) e faz as escolhas (y^t, x_1^t, x_2^t). No período s, ela enfrenta os preços (p^s, w_1^s, w_2^s) e faz as escolhas (y^s, x_1^s, x_2^s). Sendo $y^t = y^s$, se essa firma mantém a mesma função de produção nos dois períodos, e considerando que ela seja maximizadora de lucro, prove que a soma dos produtos das variações dos preços dos fatores pelas variações de suas respectivas demandas não pode ser maior que zero e explique.

R:

Por lucratividade revelada:

$$p^t y^t - w_1^t x_1^t - w_2^t x_2^t \geq p^t y^s - w_1^t x_1^s - w_2^t x_2^s \tag{1}$$

$$p^s y^s - w_1^s x_1^s - w_2^s x_2^s \geq p^s y^t - w_1^s x_1^t - w_2^s x_2^t \tag{2}$$

Reescrevendo (1):

$$p^t(y^t - y^s) - w_1^t(x_1^t - x_1^s) - w_2^t(x_2^t - x_2^s) \geq 0$$

Reescrevendo (2):

$$p^s(y^s - y^t) - w_1^s(x_1^s - x_1^t) - w_2^s(x_2^s - x_2^t) = -p^s(y^t - y^s) + w_1^s(x_1^t - x_1^s) + w_2^s(x_2^t - x_2^s) \geq 0$$

Somando as duas expressões:

$$(p^t - p^s)(y^t - y^s) - (w_1^t - w_1^s)(x_1^t - x_1^s) - (w_2^t - w_2^s)(x_2^t - x_2^s) \geq 0$$

$$\Delta p \Delta y - \Delta w_1 \Delta x_1 - \Delta w_2 \Delta x_2 \geq 0$$

Como $y^t = y^s$, temos que $\Delta y = 0$, logo:

$$-\Delta w_1 \Delta x_1 - \Delta w_2 \Delta x_2 \geq 0$$

$$\Delta w_1 \Delta x_1 + \Delta w_2 \Delta x_2 \leq 0$$

Ou seja a soma dos produtos das variações dos preços dos fatores pelas variações de suas respectivas demandas é menor ou igual a zero.