CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

ECO 1113 TEORIA MICROECONÔMICA I

PROFESSOR: JULIANO ASSUNÇÃO TURMA: 2JA

Minimização de Custos - Gabarito

2019

Questão 1:

Contas com Cobb-Douglas. Considere uma firma que produz o produto y através da função de produção $f(x) = x_1^a x_2^b$. Seja w_1 e w_2 o preço dos fatores e p o preço do produto final.

(a) Monte o problema de maximização de lucros da firma. Calcule a TMST. Encontre a demanda pelos fatores.

(b) Monte o problema de minimização de custo da firma. Calcule a TMST. Encontre a demanda condicional pelos fatores.

(c) A minimização de custos é condição necessária e suficiente para garantir a maximização de lucros. Essa afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique usando a resposta dos itens anteriores.

R:

a)

$$\max_{x_1,x_2} \ pf(x_1,x_2) - w_1x_1 - w_2x_2$$

$$\max_{x_1,x_2} \ px_1^a x_2^b - w_1x_1 - w_2x_2$$

CPOs:

$$x_1: \qquad apx_1^{a-1}x_2^b - w_1 = 0 \tag{1}$$

$$x_2: \qquad bpx_1^a x_2^{b-1} - w_2 = 0 \tag{2}$$

Rearranjando e dividindo (1) por (2) para encontrar a TMST:

$$-\frac{apx_1^{a-1}x_2^b}{bpx_1^a x_2^{b-1}} = -\frac{w_1}{w_2}$$

$$TMST = -\frac{ax_1^{a-1}x_2^b}{bx_1^a x_2^{b-1}} = -\frac{w_1}{w_2}$$

Para encontrar a demanda por fatores iremos multiplicar (1) por x_1 e (2) por x_2:

$$(1) \times x_1: \qquad (apx_1^{a-1}x_2^b - w_1)x_1 = 0x_1$$
$$apx_1^a x_2^b - w_1 x_1 = 0$$
$$apy - w_1 x_1 = 0$$
$$x_1 = \frac{apy}{w_1}$$

$$(2) \times x_2: \qquad (bpx_1^a x_2^{b-1} - w_2)x_2 = 0x_2$$
$$bpx_1^a x_2^b - w_2 x_2 = 0$$
$$bpy - w_2 x_2 = 0$$
$$x_2 = \frac{bpy}{w_2}$$

Assim, temos expressões para x_1 e x_2 em função dos preços e de y e podemos substitui-las na função de produção:

$$y = f(x_1, x_2) = \left(\frac{apy}{w_1}\right)^a \left(\frac{bpy}{w_2}\right)^b$$
$$y = y^{a+b}\left(\frac{ap}{w_1}\right)^a \left(\frac{bp}{w_2}\right)^b$$
$$y^{1-(a+b)} = \left(\frac{ap}{w_1}\right)^a \left(\frac{bp}{w_2}\right)^b$$
$$y = \left[\left(\frac{ap}{w_1}\right)^a \left(\frac{bp}{w_2}\right)^b\right]^{\frac{1}{1-(a+b)}}$$

Assim, temos uma expressão para y em função apenas dos preços, e podemos substituí-la nas em x_1 e x_2 encontrados anteriormente para conseguirmos as demandas pelos fatores:

$$x_1 = \frac{ap}{w_1}\left[\left(\frac{ap}{w_1}\right)^a \left(\frac{bp}{w_2}\right)^b\right]^{\frac{1}{1-(a+b)}} \qquad x_2 = \frac{bp}{w_2}\left[\left(\frac{ap}{w_1}\right)^a \left(\frac{bp}{w_2}\right)^b\right]^{\frac{1}{1-(a+b)}}$$

b)

$$\min_{x_1, x_2} \quad w_1 x_1 + w_2 x_2 \qquad s.a \qquad x_1^a x_2^b = y$$
$$\mathscr{L} = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \lambda(x_1^a x_2^b - y)$$

CPOs:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} = w_1 - \lambda a x_1^{a-1} x_2^b = 0 \qquad (3)$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} = w_2 - \lambda b x_1^a x_2^{b-1} = 0 \qquad (4)$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = -x_1^a x_2^b + y = 0 \qquad (5)$$

Rearranjando e dividindo (3) por (4) para encontrar a TMST:

$$-\frac{apx_1^{a-1}x_2^b}{bpx_1^a x_2^{b-1}} = -\frac{w_1}{w_2}$$
$$TMST = -\frac{ax_1^{a-1}x_2^b}{bx_1^a x_2^{b-1}} = -\frac{w_1}{w_2}$$

Para encontrar a demanda condicional por fatores iremos multiplicar (3) por x_1 e (4) por x_2:

$$(3)\times x_1: \qquad w_1x_1-\lambda a x_1^{a-1}x_2^b x_1 = 0x_1$$
$$w_1x_1-\lambda a y = 0$$
$$x_1=\frac{\lambda a y}{w_1}$$

$$(4)\times x_2: \qquad w_2x_2-\lambda b x_1^{a}x_2^{b-1} x_2 = 0x_2$$
$$w_2x_2-\lambda b y = 0$$
$$x_2=\frac{\lambda b y}{w_2}$$

Assim, temos expressões para x_1 e x_2 em função dos preços, de y e de λ e podemos substitui-las em (5):

$$\left(\frac{\lambda a y}{w_1}\right)^a\left(\frac{\lambda b y}{w_2}\right)^b = y$$
$$y = y^{a+b}\lambda^{a+b}\left(\frac{a}{w_1}\right)^a\left(\frac{b}{w_2}\right)^b$$
$$\lambda = \left[y^{1-(a+b)}\left(\frac{a}{w_1}\right)^{-a}\left(\frac{b}{w_2}\right)^{-b}\right]^{\frac{1}{a+b}}$$

Com essa expressão para λ podemos substituir em x_1 e x_2 e encontrar as demandas condicionais pelos fatores:

$$x_1 = \left[y^{1-(a+b)}\left(\frac{a}{w_1}\right)^{-a}\left(\frac{b}{w_2}\right)^{-b}\right]^{\frac{1}{a+b}}\frac{ay}{w_1}$$
$$x_1 = \left[\left(\frac{a}{w_1}\right)^{b}\left(\frac{b}{w_2}\right)^{-b}\right]^{\frac{1}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$

$$x_2 = \left[y^{1-(a+b)}\left(\frac{a}{w_1}\right)^{-a}\left(\frac{b}{w_2}\right)^{-b}\right]^{\frac{1}{a+b}}\frac{by}{w_2}$$
$$x_2 = \left[\left(\frac{a}{w_1}\right)^{-a}\left(\frac{b}{w_2}\right)^{a}\right]^{\frac{1}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$

c) Falsa. $\longrightarrow$ É necessária! Mas não suficiente!

A resposta da minimização de custos não nos da a quantidade ótima de y, apenas as demandas ótimas dos insumos *dado y*. Logo, não é condição suficiente.

É condição necessária pois nos dá a quantidade de insumos ótima para cada quantidade produzida. Caso produzirmos y ótimo com outra quantidade de insumos, poderíamos diminuir o custo, e aumentar o lucro, passando a demandar a quantidade ótima.

Questão 2:

Apresente uma função de produção f, um vetor de insumos z e preços de insumos w tais que z é a solução do problema de minimização de custo para um determinado nível de produto y, mas não faz parte da solução do problema de maximização de lucro da firma para nenhum preço do produto.

R:

Aqui, podemos pensar em uma função de produção que possui retornos crescentes de escala, por exemplo $f(x) = x_1x_2$. Com uma função de produção podemos calcular sua demanda condicional por fatores, o que nos dá, dado um valor de y e preços dos insumos, o vetor de insumos ótimo. Utilizando a demanda condicional por fatores encontrada na questão 1, letra b, e assumindo $y = 4$ e $w_1 = w_2 = 1$:

$$x_1 = \left[\left(\frac{a}{w_1}\right)^b \left(\frac{b}{w_2}\right)^{-b}\right]^{\frac{1}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$
$$x_1 = \left[\left(\frac{1}{1}\right)^1 \left(\frac{1}{1}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}} 4^{\frac{1}{2}}$$
$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \left[\left(\frac{a}{w_1}\right)^{-a} \left(\frac{b}{w_2}\right)^{a}\right]^{\frac{1}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$
$$x_2 = \left[\left(\frac{1}{1}\right)^{-1} \left(\frac{1}{1}\right)^{1}\right]^{\frac{1}{2}} 4^{\frac{1}{2}}$$
$$x_2 = 2$$

Porém, como temos retornos crescentes de escala, sabemos que, se multiplicarmos a quantidade de cada insumo por um valor t, iremos multiplicar a quantidade produzida por um valor maior que t, de forma que esses valores encontrados não são o resultado da maximização de lucro, independente do preço do produto. Calculando o lucro nesse ponto e o lucro caso aumente a quantidade de insumos:

$$\begin{aligned}\Pi &= py - w_1x_1 - w_2x_2 \\ &= p.4 - 1.2 - 1.2 \\ &= 4p - 4 \\ &= 4(p-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi' &= p.(t.2)(t.2) - w_1.(t.2) - w_2.(t.2) \\ &= p.4t^2 - 2t - 2t \\ &= 4t^2p - 4t \\ &= 4t(tp-1)\end{aligned}$$

Assim, teremos que $\Pi' > \Pi$ sempre que:

$$\begin{aligned}\Pi' &> \Pi \\ 4t(tp-1) &> 4(p-1) \\ t^2p - t &> p - 1 \\ t^2p - t + 1 - p &> 0\end{aligned}$$

Resolvendo essa equação de segundo grau, $t > 1$ satisfará essa condição sempre que $p > 1/2$. Ou seja, se $p > 1/2$, ter $(y, x_1, x_2) = (4, 2, 2)$ não maximizará lucro, pois poderá aumentá-lo aumentando a sua produção. E, repare que, se $p \leq 1/2$, o lucro nesse ponto é menor do que zero: $\Pi = 4(p-1) < 0$, de forma que a empresa poderá aumentar o seu lucro (ou diminuir o seu prejuízo) parando de produzir e obtendo lucro zero.

Assim, o ponto obtido pela minimização de custos não faz parte do problema de maximização de lucro da firma para nenhum preço do produto.

Questão 3:

Considere as seguintes funções de produção:

(i) $f(z) = z_1 + z_2$

(ii) $f(z) = min\{z_1, z_2\}$

(iii) $f(z) = z_1^a z_2^b$

(a) Quais apresentam retornos constantes de escala?

(b) Calcule a função custo e a demanda condicional por fatores para cada uma delas.

R:

a) Retornos de escala:

(i)

$$\begin{aligned} f(tz) &= (tz_1) + (tz_2) \\ &= t(z_1 + z_2) \\ &= tf(z) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Possui retornos constantes de escala.

(ii)

$$\begin{aligned} f(tz) &= min\{tz_1, tz_2\} \\ &= tmin\{z_1, z_2\} \\ &= tf(z) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Possui retornos constantes de escala.

(iii)

$$\begin{aligned} f(tz) &= (tz_1)^a (tz_2)^b \\ &= t^{a+b} z_1^a z_2 b \\ &= t^{a+b} f(z) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Possui retornos constantes de escala se $a + b = 1$.

b)

(i) Substitutos Perfeitos:

Demanda condicional por fatores:

$$z_1 = \begin{cases} 0 & se\ w_1 > w_2 \\ y & se\ w_1 < w_2 \end{cases} \qquad z_2 = \begin{cases} 0 & se\ w_2 > w_1 \\ y & se\ w_2 < w_1 \end{cases}$$

Função Custo:

$$\begin{aligned} C &= w_1 z_1 + w_2 z_2 \\ &= \begin{cases} w_1 y & se\ w_1 < w_2 \\ w_2 y & se\ w_1 > w_2 \end{cases} \\ &= y\ min\{w_1, w_2\} \end{aligned}$$

(ii) Proporções Fixas:

Demanda condicional por fatores:

$$z_1 = z_2 = y$$

Função Custo:

$$
\begin{aligned}
C &= w_1 z_1 + w_2 z_2 \\
&= w_1 y + w_2 y \\
&= y(w_1 + w_2)
\end{aligned}
$$

(iii) Cobb-Douglas:

Demanda Condicional por Fatores:

$$\min_{z_1, z_2} w_1 z_1 + w_2 z_2 \qquad s.a \qquad x_1^a x_2^b = y$$

Como resolvido na questão 1.b:

$$x_1 = \left[\left(\frac{a}{w_1}\right)^b \left(\frac{b}{w_2}\right)^{-b}\right]^{\frac{1}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}} \qquad\qquad x_2 = \left[\left(\frac{a}{w_1}\right)^{-a} \left(\frac{b}{w_2}\right)^{a}\right]^{\frac{1}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$

Função Custo:

$$
\begin{aligned}
C &= w_1 z_1 + w_2 z_2 \\
&= w_1 \left[\left(\frac{a}{w_1}\right)^b \left(\frac{b}{w_2}\right)^{-b}\right]^{\frac{1}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}} + w_2 \left[\left(\frac{a}{w_1}\right)^{-a} \left(\frac{b}{w_2}\right)^{a}\right]^{\frac{1}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}} \\
&= (w_1^a w_2^b)^{\frac{1}{a+b}} \left[(\left(\frac{a}{b}\right)^b + \left(\frac{b}{a}\right)^a\right]^{\frac{1}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}
\end{aligned}
$$

Questão 4:

Considere uma firma com função de produção $f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$ e seja w_1 o preço do fator 1, w_2 o preço do fator 2 e y o nível de produto.

(a) Monte o problema de minimização de custos e obtenha as funções de demanda condicionadas dos fatores no longo prazo.

(b) Calcule a função custo no longo prazo.

(c) No curto prazo, o fator 2 está fixo de tal maneira que $\overline{x}_2 = 2^{7/3}$. Supondo $w_1 = w_2 = 1$, calcule o custo mínimo de produzir 4 unidades do produto no curto prazo.

(d) Verifique que o resultado obtido no item (c) é igual ao valor da função custo no longo prazo quando $w_1 = 1$, $w_2 = 1$ e $y = 4$. Por que isso ocorre?

R:

a) Problema de minimização de custos no longo prazo, onde podemos escolher a quantidade de todos os fatores:

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2 \qquad s.a \qquad x_1^{1/3} x_2^{2/3} = y$$

$$\mathscr{L} = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \lambda(x_1^{1/3} x_2^{2/3} - y)$$

Onde a resolução do problema é a mesma feita para a questão 1 item b, com $a = 1/3$ e $b = 2/3$ de forma que temos as seguintes demandas condicionadas de fatores:

$$x_1 = \left[\left(\frac{1/3}{w_1}\right)^{2/3}\left(\frac{2/3}{w_2}\right)^{-2/3}\right]y = \left(\frac{w_2}{2w_1}\right)^{2/3} y$$

$$x_2 = \left[\left(\frac{1/3}{w_1}\right)^{-1/3}\left(\frac{2/3}{w_2}\right)^{1/3}\right]y = \left(\frac{2w_1}{w_2}\right)^{1/3} y$$

b) Função custo no longo prazo:

$$\begin{aligned} C &= w_1x_1 + w_2x_2 \\ &= w_1\left(\frac{w_2}{2w_1}\right)^{2/3} y + w_2\left(\frac{2w_1}{w_2}\right)^{1/3} y \\ &= \left[\frac{w_1^{1/3}w_2^{2/3}}{2^{2/3}} + 2^{1/3}w_1^{1/3}w_2^{2/3}\right]y \\ &= [2^{-2/3} + 2^{1/3}]w_1^{1/3}w_2^{2/3}y \end{aligned}$$

c) Curto Prazo: $\overline{x}_2 = 2^{7/3}$

Com $w_1 = w_2 = 1$ o custo mínimo de produzir 4 unidades é:

$$\min_{x_1} w_1x_1 + w_2x_2 \qquad s.a \qquad x_1^{1/3}x_2^{2/3} = y$$

$$\min_{x_1} x_1 + 2^{7/3} \qquad s.a \qquad x_1^{1/3}(2^{7/3})^{2/3} = 4$$

Isolando x_1 na restrição temos:

$$\begin{aligned} x_1^{1/3}(2^{7/3})^{2/3} &= 4 \\ x_1 &= 2^{4/3} \end{aligned}$$

Substituindo na função custo:

$$\begin{aligned} C &= w_1x_1 + w_2x_2 \\ &= 2^{4/3} + 2^{7/3} \end{aligned}$$

d) Substituindo $w_1 = w_2 = 1$ e $y = 4$ na função custo de longo prazo encontrado na letra b:

$$\begin{aligned} C &= [2^{-2/3} + 2^{1/3}]w_1^{1/3}w_2^{2/3}y \\ &= [2^{-2/3} + 2^{1/3}]1^{1/3}1^{2/3}4 \\ &= [2^{-2/3} + 2^{1/3}]2^{6/3} \\ &= 2^{4/3} + 2^{7/3} \end{aligned}$$

Assim, o custo encontrado na letra c é exatamente igual ao custo de longo prazo. Isso ocorre pois a quantidade de x_2 fixada no enunciado da letra c é exatamente a quantidade ótima que seria demandada para aquele conjunto de preços caso a firma estivesse produzindo aquela quantidade no longo prazo:

$$\begin{aligned} x_2(1,1,4) &= \left(\frac{2\times 1}{1}\right)^{1/3} \times 4 \\ &= 2^{1/3} \times 4 \\ &= 2^{7/3} \end{aligned}$$

Questão 5:

Uma firma tem duas fábricas com função custo $c_1(y_1) = y_1^{2/2}$ e $c_2(y_2) = y_2$. Qual é a função custo da firma?

R:

Assumindo que o produto fabricado nas duas fábricas seja idêntico em todos os aspectos, menos o seu custo, a firma irá dividir a sua produção entre as fábricas de maneira a minimizar o seu custo total:

$$\begin{aligned} \min_{y_1,y_2} c_1(y_1) + c_2(y_2) \qquad s.a \qquad y_1 + y_2 = y \\ \min_{y_1,y_2} \frac{y_1^2}{2} + y_2 \qquad s.a \qquad y_1 + y_2 = y \\ \mathscr{L} = \frac{y_1^2}{2} + y_2 - \lambda(y_1 + y_2 - y) \end{aligned}$$

CPOs:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_1} = y_1 - \lambda = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_2} = 1 - \lambda = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = -y_1 - y_2 + y = 0 \qquad (8)$$

Isolando λ em (6) e (7):

$$\begin{aligned} y_1 = \lambda = 1 \\ y_1 = 1 \end{aligned}$$

Substituindo em (8):

$$\begin{aligned} y = y_1 + y_2 \\ y_2 = y - 1 \end{aligned}$$

Logo, a função custo da firma será:

$$C(y) = \begin{cases} \frac{y^2}{2} & se\ y \leq 1 \\ \frac{1}{2} + (y-1) & sey > 1 \end{cases}$$

Isso ocorre pois a fábrica tem custo marginal igual à 1 independente da quantidade que ela está produzindo, enquanto a fábrica 1 tem $CMg_1 = y_1$, que é crescente na quantidade produzida. Assim, $CMg_1 < Cmg_2$ sempre que $y_1 < 1$, mas $Cmg_1 > CMg_2$ se $y_1 > 1$, assim, a firma irá produzir na fábrica 1 até produzir $y = 1$ e depois passará a produzir na fabrica 2.

Questão 6:

Uma firma usa 4 insumos para produzir um produto. A função de produção é $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = min\{x_1, x_2\} + min\{x_3, x_4\}$.

(a) Qual é o vetor de demanda condicional por fatores para produzir 1 unidade de produto quando o vetor de preços é $w = (1, 2, 3, 4)$?

(b) Qual é a função custo?

(c) Essa tecnologia tem que tipo de retornos de escala?

(d) Uma outra firma tem função de produção $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = min\{x_1 + x_2, x_3 + x_4\}$. Como mudam as respostas anteriores?

R:

a) Demanda condicional dos fatores se $y = 1$ e $w = (1, 2, 3, 4)$.

Podemos pensar em $(x_1, x_2) = a$ e $(x_3, x_4) = b$ como dois insumos, dado que, por aparecerem conjuntamente dentro das funções mínimo, eles são sempre utilizados em conjunto, ou seja, em valores iguais. De forma que temos os seguintes preços: $w = (w_a, w_b) = (w_1 + w_2, w_3 + w_4) = (3, 7)$. E a função de produção se torna uma função de substitutos perfeitos:

$$f(x) = f(a, b) = a + b$$

Logo, como $w_a < w_b$, a firma demandar apenas do insumo a, de forma que, para produzir $y = 1$ temos $a = 1$ e $b = 0$. Traduzindo aos insumos anteriores, temos $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 0)$.

b) Função custo:

Com $f(a, b)$ sendo uma função de produção de substitutos perfeitos, sabemos que a sua função custo será:

$$C = \begin{cases} w_a y & se\ w_a < w_b \\ w_b y & se\ w_a > w_b \end{cases}$$

$$= y\, min\{w_a, w_b\}$$

$$= y\, min\{w_1 + w_2, w_3 + w_4\}$$

c) Retornos de Escala:

Multiplicando todos os insumos por $t > 1$:

$$\begin{aligned} f(tx) &= min\{tx_1, tx_2\} + min\{tx_3, tx_4\} \\ &= t \times min\{x_1, x_2\} + t \times min\{x_3, x_4\} \\ &= t \times [min\{x_1, x_2\} + min\{x_3, x_4\}] \\ &= tf(x) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Retornos Constantes de Escala.

d) Assumindo a função de produção: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = min\{x_1 + x_2, x_3 + x_4\}$.

(a) Demanda condicional de fatores se $y = 1$ e $w = (1, 2, 3, 4)$:

Como temos uma função de produção de proporções fixas, sabemos que:

$$\begin{aligned} y &= x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \\ 1 &= x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \end{aligned}$$

Analisando cada equação separadamente:

Primeiro temos $x_1 + x_2 = 1$, assim, se $w_1 < w_2$ a firma demandará apenas do insumo 1, de forma que $x_1 = 1$ e $x_2 = 0$. Caso $w_1 > w_2$ a firma demandará apenas o insumo 2 e $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$. Como $w_1 = 1 < w_2 = 2$ temos $x_1 = 1$ e $x_2 = 0$. Temos um caso análogo com $x_3 + x_4 = 1$: como $w_3 = 3 < w_4 = 4$ a firma demanda $x_3 = 1$ e $x_4 = 0$. Assim, o vetor de demanda de fatores é $x = (1, 0, 1, 0)$.

(b) Função Custo:

Chamando $x_1 + x_2 = \alpha$ e $x_3 + x_4 = \beta$, podemos reescrever a função de produção como $f(\alpha, \beta) = min\{\alpha, \beta\}$, que é uma função de proporções fixas tradicional. Assim, sabemos que sua função custo é: $C = (w_\alpha + w_\beta)y$. Como $\alpha = x_1 + x_2$ e $\beta = x_3 + x_4$ temos que $w_\alpha = min\{w_1, w_2\}$ e $w_\beta = min\{w_3, w_4\}$ e a função custo se torna:

$$C = [min\{w_1, w_2\} + min\{w_3, w_4\}]y$$

(c) Retornos de Escala:

$$\begin{aligned} f(tx) &= min\{tx_1 + tx_2, tx_3 + tx_4\} \\ &= min\{t(x_1 + x_2), t(x_3 + x_4)\} \\ &= t \times min\{x_1 + x_2, x_3 + x_4\} \\ &= tf(x) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Retornos Constantes de Escala.