CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

ECO 1113 TEORIA MICROECONÔMICA I

PROFESSOR: JULIANO ASSUNÇÃO TURMA: 2JA

Equação de Slutsky - Gabarito

2019

Questão 1:

A função de utilidade de um consumidor é dada por $u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} + x_2$. O preço do bem 1 é 1, o preço do bem 2 é 4 e a renda do consumidor é 20.

(a) Considere que o preço do bem 1 aumente para 2. Decomponha a variação da demanda pelo bem 1 em efeito substituição de Slutsky e efeito renda.

(b) A decomposição do item (a) se alteraria se, em vez do efeito substituição de Slutsky, fosse utilizado o efeito substituição de Hicks?

R:

a) Primeiro vamos encontrar a demanda desse indivíduo:

$$\max x_1^{1/2} + x_2 \qquad s.a\ p_1x_1 + p_2x_2 \leq m$$
$$\mathscr{L} = x_1^{1/2} + x_2 - \lambda(p_1x_2 + p_2x_2 - m)$$

CPOs:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} = \frac{1}{2}x_1^{-1/2} - p_1\lambda = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} = 1 - p_2\lambda = 0 \qquad (2)$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} = -p_1x_1 - p_2x_2 + m = 0 \qquad (3)$$

Por (2) temos que $\lambda = {}^1/_{p_2}$, substituindo em (1):

$$\frac{1}{2}\frac{1}{x_1^{1/2}} = p_1\frac{1}{p_2} \longrightarrow \quad x_1^{1/2} = \frac{p_2}{2p_1}$$
$$x_1 = \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{p_2^2}{p_1^2}$$

Substituindo x_1 em (3) encontramos x_2:

$$p_1 \frac{1}{4}\frac{p_2^2}{p_1^2} + p_2 x_2 = m$$

$$p_2 x_2 = m - \frac{1}{4}\frac{p_2^2}{p_1^2} \longrightarrow x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{1}{4}\frac{p_2}{p_1}$$

Substituindo valores, temos que quando os preços são (1,4):

$$x_1(1,4,20) = \frac{1}{4}\frac{4^2}{1^2} = 4 \qquad x_2(1,4,20) = \frac{20}{4} - \frac{1}{4}\frac{4}{1} = 4$$

E com a mudança de p_1 para $p_1' = 2$ temos:

$$x_1'(2,4,20) = \frac{1}{4}\frac{4^2}{2^2} = 1 \qquad x_2'(2,4,20) = \frac{20}{4} - \frac{1}{4}\frac{4}{2} = 4,5$$

Para uma variação infinitesimal de p_1 temos:

$$\frac{\partial x_1(p_1,p_2,m)}{\partial p_1} = \underbrace{\frac{\partial x_1^s(p_1,p_2,x_1,x_2)}{\partial p_2}}_{\text{Efeito Substituição}} \underbrace{-\frac{\partial x_1(p_1,p_2,m)}{\partial m} x_1}_{\text{Efeito Renda}}$$

Ou seja, a variação total de x_1 é a soma do efeito substituição com o efeito renda:

$$x_1'(p_1',p_2,m) - x_1(p_1,p_2,m) = 1 - 4 = -3 = ES + ER$$

Para encontrar ambos os efeitos, vamos explorar o fato de que o efeito substituição de Slutsky é a variação mantendo o poder aquisitivo do consumidor constante. Assim, vamos olhar primeiro para qual seria a demanda caso a renda variasse de forma que o indivíduo pudesse exatamente comprar a cesta inicial aos novos preços:

Para comprar a cesta antigo aos novos preços, o dispêndio seria:

$$m' = p_1' x_1 + p_2 x_2 = 2 \times 4 + 4 \times 4 = 24$$

Com uma renda de 24 e os novos preços, a demanda de x_1 seria:

$$x_1''(p_1',p_2,m') = \frac{1}{4}\frac{4^2}{2^2} = 1$$

A variação de x_1 original para esse valor intermediário x_1'' nos dá o efeito substituição. E a variação

desse valor intermediário até a quantidade final nos dá o efeito renda:

$$ES = x_1(p_1', p_2, m') - x_1(p_1, p_2, m) = x_1'' - x_1 = 1 - 4 = -3$$
$$ER = x_1(p_1'.p_2, m) - x_1(p_1', p_2, m') = x_1' - x_1'' = 1 - 1 = 0$$

Aqui vemos uma das principais características das preferências quase-lineares: o bem não linear terá efeito renda nulo (em um ponto de ótimo interior).

b) Efeito Substituição de Hicks

Para o efeito substituição de Hicks, mantemos constante a utilidade do consumidor, e não o seu poder aquisitivo como fazíamos no efeito substituição de Slutsky:

$$\frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1^H(p_1, p_2, \overline{u})}{\partial p_2} - \frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial m} x_1$$

(Para variações infinitesimais de p_1, os efeitos substituição de Slutsky e Hicks são iguais.)

Vamos primeiro encontrar a demanda hickisiana do indivíduo:

$$\min\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \qquad s.a \quad x^{1/2} + x_2 \leq \overline{u}$$
$$\mathscr{L} = -p_1 x_1 - p_2 x_2 + \lambda(x_1^{1/2} + x_2 - \overline{u})$$

CPOs:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} = -p_1 + \frac{1}{2}\lambda x_1^{-1/2} = 0 \qquad (4)$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} = -p_2 + \lambda \qquad (5)$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x_1^{1/2} + x_2 - \overline{u} = 0 \qquad (6)$$

Por (5) temos que $\lambda = p_2$, substituindo em (4):

$$p_1 = \frac{1}{2}\frac{p_2}{x_1^{1/2}} \longrightarrow x_1^{1/2} = \frac{1}{2}\frac{p_2}{p_1}$$
$$x_1^H(p_1, p_2, \overline{u}) = \frac{1}{4}\left(\frac{p_2}{p_2}\right)^2$$

E substituindo x_1^H em (6):

$$\left[\left(\frac{1}{2}\frac{p_2}{p_1}\right)^2\right]^{1/2} + x_2 = \overline{u}$$
$$x_2^H(p_1, p_2, \overline{u}) = \overline{u} - \frac{1}{2}\frac{p_2}{p_1}$$

E, análogo ao que tínhamos anteriormente:

$$ESH = x_1^H(p_1', p_2, u) - x_1^H(p_1, p_2, u)$$
$$ERH = x_1^H(p_1', p_2, u') - x_1^H(p_1, p_2, u)$$

Achando a utilidade original: $u(x_1, x_2) = (4)^{1/2} + 1 = 3$. Logo:

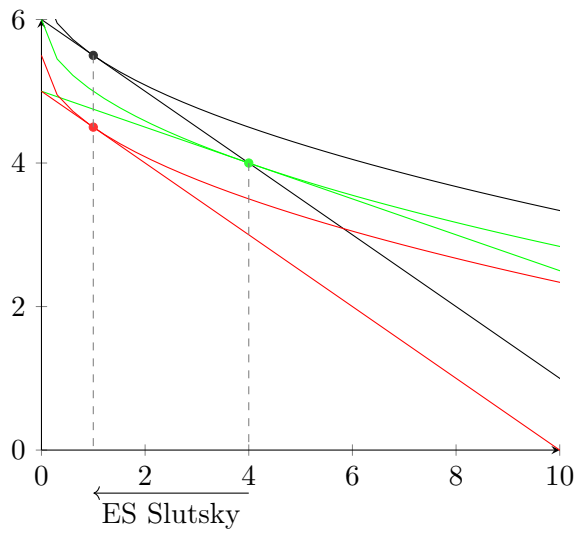
$$x_1^H(p_1', p_2, u) = \frac{1}{4}\left(\frac{p_2}{p_1'}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{4^2}{2^2} = 1$$

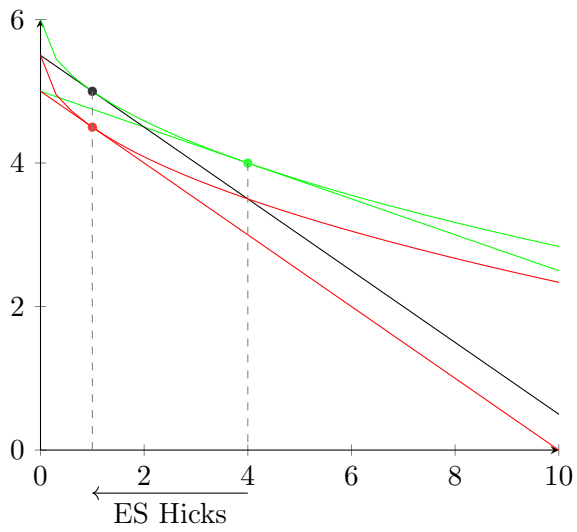
Assim:

$$ESH = 1 - 4 = -3$$
$$ERH = 1 - 1 = 0$$

Nesse caso, o efeito substituição de Slutsky e de Hicks são iguais para x_1! Isso se deve à propriedade das preferências quase-lineares.

Também podemos observar isso graficamente abaixo, onde no primeiro gráfico temos Slutsky e no segundo Hicks. Em verde temos a cesta inicial, em vermelho a cesta final e em preto temos a cesta intermediária de cada caso.





Questão 2:

Suponha que um consumidor seja indiferente entre a cesta $X = (x_1, x_2)$ e a cesta $Y = (y_1, y_2)$. Suponha que o consumidor tenha escolhido a cesta X quando os preços eram (p_1, p_2), e a cesta Y quando os preços eram (p_1', p_2'). Usando seus conhecimentos sobre preferência revelada, mostre que o

efeito substituição de Hicks tem sinal negativo se $p_2 = p_2'$. (Dica: pense na relação de gastos com as duas cestas para cada vetor de preços.)

R:

Dado que o indivíduo é indiferente entre X e Y ,se com (p_1, p_2) escolhe X, X deve ser tão ou mais barato que Y:

$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq p_1y_1 + p_2y_2$$
$$p_1x_1 - p_1y_1 \leq p_2y_2 - p_2x_2$$
$$p_1(x_1 - y_1) \leq p_2(y_2 - x_2)$$

Analogamente, se escolhe Y quando os preços são (p_1', p_2), Y deve ser tão ou mais barato que X:

$$p_1'y_1 + p_2y_2 \leq p_1'x_1 + p_2x_2$$
$$p_1'y_1 - p_1'x_1 \leq p_2x_2 - p_2y_2$$
$$p_1'(y_1 - x_1) \leq p_2(x_2 - y_2)$$

Juntando as expressões:

$$p_1(x_1 - y_1) + p_1'(y_1 - x_1) \leq p_2(y_2 - x_2) + p_2(x_2 - y_2)$$
$$p_1(x_1 - y_1) - p_1'(x_1 - y_1) \leq p_2(y_2 - x_2) - p_2(y_2 - x_2)$$
$$(p_1 - p_1')(x_1 - y_1) \leq 0$$

Para que a multiplicação desses dois termos seja negativa, necessariamente temos que eles possuem sinais opostos. Como o primeiro termo representa a variação do preço e segundo a variação da quantidade, quando o preço aumenta (diminui) a quantidade diminui (aumenta). Como estamos sob a mesma curva de indiferença $(X \sim Y)$, ou seja, estamos mantendo o mesmo nível de utilidade, vemos que o efeito substituição de Hicks possui sinal negativo.