

**João Guilherme Mansur Moreira  
Alves**

**Modelando a volatilidade de  
mercado com o modelo APARCH**  
Um estudo de caso no mercado acionário  
brasileiro

**PROJETO DE GRADUAÇÃO**

**DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS**

Programa de Graduação em Economia

Rio de Janeiro  
Novembro 2023



**João Guilherme Mansur Moreira Alves**

**Modelando a volatilidade de mercado com o  
modelo APARCH**

**Um estudo de caso no mercado acionário brasileiro**

**Projeto de Graduação**

Projeto apresentado ao Programa de Graduação em Economia da PUC–Rio como requisito parcial para finalização do curso de Economia.

Orientador: Prof. Antonio Carlos Figueiredo

Rio de Janeiro  
Novembro 2023

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**João Guilherme Mansur Moreira Alves**

Ficha Catalográfica

Mansur, João Guilherme

Modelando a volatilidade de mercado com o modelo APARCH / João Guilherme Mansur Moreira Alves; orientador: Antonio Carlos Figueiredo. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Ciências Econômicas, 2023.

v., 51 f: il. ; 29,7 cm

1. Monografia (graduação) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Ciências Econômicas.

Inclui referências bibliográficas.

1. Ciências Econômicas – Monografia. 2. Volatilidade condicional. 3. Modelo GARCH. 4. Modelo APARCH. 5. Mercado de ações brasileiro. 6. Modelagem financeira. I. Figueiredo, Antonio Carlos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Ciências Econômicas. III. Título.

CDD: 000

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer, primeiramente, meus pais - Claudia e Luiz Guilherme - por me proporcionarem o melhor da educação, minha namorada - Mariana - por toda motivação e suporte ao longo da minha trajetória e meu falecido avô - Luiz Octávio - pelos ensinamentos e memórias que, sem dúvidas, carregarei para o resto da vida.

Não menos importante, gostaria de agradecer: meus irmãos - Felipe, Maria Eduarda e Tiago; Minhas avós - Maria Adelaide e Wanda; Meus sobrinhos - Elis, Francisco e Maya.

Agradeço aos meus amigos: de colégio - Lucas Amarante, Felipe Berger, Luiz Coelho, Bruno Mello, Rodrigo Nunes, Thiago Feijó, Gustavo Lorenzatto, Julio Cesar, Pedro Ivan, Theo e Wallace; de "vida" - Guilherme Milano, João Gabriel Pestana, Leonardo Milano, Vitor Jahn, Rodrigo Zentgraf, Vitor Gonçalves e Rafael.

Por fim, agradeço ao meu orientador, Antônio Carlos Figueiredo, por todo o suporte técnico durante o desenvolvimento do projeto.

## Resumo

Mansur, João Guilherme; Figueiredo, Antonio Carlos. **Modelando a volatilidade de mercado com o modelo APARCH**. Rio de Janeiro, 2023. 51p. Projeto de Graduação — Departamento de Ciências Econômicas, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O presente trabalho tem como objetivo dar continuidade à pesquisa realizada por Ding, comparando dois modelos de volatilidade: GARCH e APARCH. Buscamos identificar as capacidades de previsão e estimação do modelo APARCH, bem como verificar sua habilidade em capturar fatos estilizados comuns a volatilidade condicional, como caudas gordas, persistência, assimetria e efeito de alavancagem. As funções densidade de probabilidade para estimação serão: Normal, T-Student e T-Student Assimétrica. Analisaremos o Índice Bovespa (Ibovespa) e as três ações com maior participação no índice: Petróleo Brasileiro S.A. (B3: PETR4), Vale S.A. (B3: VALE3) e Itaú Unibanco Holding S.A. (B3: ITUB4).

## Palavras-chave

Volatilidade condicional. Modelo GARCH. Modelo APARCH.  
Mercado de ações brasileiro. Modelagem financeira.

## Abstract

Mansur, João Guilherme; Figueiredo, Antonio Carlos. . Rio de Janeiro, 2023. 51p. Undergraduate Final Project — Department of , Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro.

The present work aims to continue the research conducted by Ding, comparing two volatility models: GARCH and APARCH. We seek to identify the forecasting and estimation capabilities of the APARCH model, as well as to verify its ability to capture common features of conditional volatility such as fat-tails, persistence of volatility, asymmetry, and leverage effect. The density functions for estimation will be Normal, T-Student, and Skewed Student-t. We will analyze the Bovespa Index (Ibovespa) and the three stocks with the highest participation in the index: Petroleo Brasileiro S.A. (B3: PETR4), Vale S.A. (B3: VALE3), and Itau Unibanco Holding S.A. (B3: ITUB4).

## Keywords

Conditional volatility. GARCH Model. APARCH model. Brazilian stock market. Financial modeling.

## Sumário

1	Cronograma	<b>10</b>
2	Motivação e Metodologia	<b>11</b>
2.1	Motivação Institucional e Pessoal	11
2.2	Metodologia Teórica e Empírica	11
3	Introdução	<b>13</b>
4	Volatilidade e os fatos estilizados	<b>19</b>
4.1	Caudas Gordas e Curtose excessiva	19
4.2	Clustering de volatilidade	20
4.3	Memória longa	20
4.4	Efeitos de alavancagem	21
4.5	Efeito de Spillover	21
5	Modelos Estocásticos de Volatilidade	<b>23</b>
5.1	Modelo ARCH	23
5.2	Modelo GARCH	24
5.3	Generalizações do modelo GARCH	24
5.4	Modelo APARCH	26
6	Aplicação Empírica	<b>27</b>
6.1	Índice Bovespa	27
6.2	Petrobras	32
6.3	Vale	36
6.4	Itaú	41
7	Conclusão	<b>47</b>
	Referências Bibliográficas	<b>49</b>

## Lista de Figuras

3.1	Skew de volatilidade das calls do índice SPX para o vencimento de 02/10/2023. Fonte: Elaboração própria.	16
3.2	Estrutura à termo das Calls de SPX no strike 4300.0. Fonte: Elaboração própria.	17
6.1	Evolução do índice Bovespa, com base no seu preço de fechamento ( $p_t$ ), de 1993-04-28 até 2023-10-31.	28
6.2	Retornos diários ( $r_t$ ) do Ibovespa, de 1993-04-28 até 2023-10-31.	28
6.3	Retornos diários absolutos ( $ r_t $ ) do Ibovespa, de 1993-04-28 até 2023-10-31.	28
6.4	Evolução da PETR4, com base no seu preço de fechamento ( $p_t$ ), de 2000-01-03 até 2023-10-31.	32
6.5	Retornos diários ( $r_t$ ) da PETR4, de 2000-01-03 até 2023-10-31.	33
6.6	Retornos diários absolutos ( $ r_t $ ) da PETR4, de 2000-01-03 até 2023-10-31.	33
6.7	Evolução da VALE3, com base no seu preço de fechamento ( $p_t$ ), de 2000-01-03 até 2023-10-31.	37
6.8	Retornos diários ( $r_t$ ) da VALE3, de 2000-01-03 até 2023-10-31.	37
6.9	Retornos diários absolutos ( $ r_t $ ) da VALE3, de 2000-01-03 até 2023-10-31.	38
6.10	Evolução de ITUB4, com base no seu preço de fechamento ( $p_t$ ), de 2000-12-21 até 2023-10-31.	42
6.11	Retornos diários ( $r_t$ ) de ITUB4, de 2000-12-21 até 2023-10-31.	43
6.12	Retornos diários absolutos ( $ r_t $ ) de ITUB4, de 2000-12-21 até 2023-10-31.	43



## Lista de Tabelas

6.1	Estatísticas descritivas - Ibovespa	29
6.2	Teste de autocorrelação - Ibovespa	29
6.3	Estimação dos parâmetros para um modelo GARCH(1,1) - Ibovespa	30
6.4	Critérios de informação para um modelo GARCH(1,1) - Ibovespa	30
6.5	Estimação dos parâmetros para um modelo APARCH(1,1) - Ibovespa	31
6.6	Critérios de informação para um modelo APARCH(1,1) - Ibovespa	31
6.7	Estatísticas descritivas - PETR4	34
6.8	Teste de autocorrelação - PETR4	34
6.9	Estimação dos parâmetros para um modelo GARCH(1,1) - PETR4	35
6.10	Critérios de informação para um modelo GARCH(1,1) - PETR4	35
6.11	Estimação dos parâmetros para um modelo APARCH(1,1) - PETR4	35
6.12	Critérios de informação para um modelo APARCH(1,1) - PETR4	36
6.13	Estatísticas descritivas - VALE3	38
6.14	Teste de autocorrelação - VALE3	39
6.15	Estimação dos parâmetros para um modelo GARCH(1,1) - VALE3	40
6.16	Critérios de informação para um modelo GARCH(1,1) - VALE3	40
6.17	Estimação dos parâmetros para um modelo APARCH(1,1) - VALE3	40
6.18	Critérios de informação para um modelo APARCH(1,1) - VALE3	41
6.19	Estatísticas descritivas - ITUB4	43
6.20	Teste de autocorrelação - ITUB4	44
6.21	Estimação dos parâmetros para um modelo GARCH(1,1) - ITUB4	44
6.22	Critérios de informação para um modelo GARCH(1,1) - ITUB4	45
6.23	Estimação dos parâmetros para um modelo APARCH(1,1) - ITUB4	45
6.24	Critérios de informação para um modelo APARCH(1,1) - ITUB4	46

*We live on an island surrounded by a sea of  
ignorance. As our island of knowledge grows,  
so does the shore of our ignorance.*

**John Archibald Wheeler.**

# 1

## **Cronograma**

1. Planejamento do projeto; (Ok)
2. Coleta e tratamento dos dados; (Ok)
3. Elaboração da parte teórica; (Ok)
4. Modelagem do experimento; (Ok)
5. Redação final e revisão do texto. (Ok)

## 2

### Motivação e Metodologia

#### 2.1

##### Motivação Institucional e Pessoal

A motivação institucional desse trabalho é, por meio de uma revisão teórica e testes empíricos, verificar se as previsões do modelo APARCH são consistentes e estatisticamente significantes para modelar a volatilidade no mercado brasileiro, de forma que, futuramente, possam-se desenvolver ferramentas de trading que utilizem tal modelo.

A motivação pessoal está associada à minha trajetória acadêmica e pessoal. Existe um certo glamour em volta do mercado financeiro que, geralmente, atrai jovens em busca de sucesso, ascensão financeira e social. Desde que optei por cursar ciências econômicas, me interessei pelo mercado financeiro. No início do 4<sup>o</sup> período (outubro de 2019), comecei a estagiar e desde então, não parei. Minha área de atuação sempre tangenciou ao mercado de derivativos, principalmente o mercado de opções, o que me motivou ainda mais a me aprofundar sobre o presente tema, dado que um contrato de opção pode ser visto, também, como um contrato de volatilidade.

#### 2.2

##### Metodologia Teórica e Empírica

Será feita uma revisão da literatura das: principais referências bibliográficas para volatilidade como medida estatística e sua importância no mercado financeiro e de opções, bem como as principais características da volatilidade de um ativo financeiro; primeiros modelos para precificação de opções e as premissas que esses modelos utilizam acerca da variância e volatilidade do ativo-objeto; modelos estocásticos de volatilidade (ARCH e GARCH); modelo APARCH e as funções densidade utilizadas (distribuições: Normal, T-Student e T-Student Assimétrica).

Através do Software RStudio e utilizando a linguagem de programação R, será feita uma análise das séries: de preço, retorno e retorno em módulo, a fim de provar fraca estacionariedade. Cálculo de algumas estatísticas relevantes como *Skewness* (Assimetria) e *Kurtosis* (Curtose), além da análise de

autocorrelação das séries de preço, buscando demonstrar que os retornos não seguem uma distribuição normal e que os modelos tipo ARCH (e derivados) podem ser aplicados. Por meio do pacote *fGarch* (*fGarch-package*), utilizaremos dois modelos - GARCH(1,1) e APARCH(1,1) - para modelar e estimar as séries financeiras propostas, aplicando cada uma das distribuições sugeridas (normal, t-student e t-student assimétrica). No total, serão seis modelos por ativo. Avaliamos então, a partir dos critérios de informação - AIC (*Akaike Information Criterion*) e BIC (*Bayes Information Criterion*) - qual o modelo mais adequado para cada ativo.

### 3 Introdução

A volatilidade de um instrumento financeiro é amplamente estudada na área de finanças. As principais teorias e modelos econométricos utilizam a variância para precificação de ativos financeiros em geral. [Markowitz, 1952] , pai da Teoria Moderna do Portfólio, introduz a ideia de um portfólio ótimo que, dentre outras premissas, busca a maximização do retorno e minimização de sua variância, sugerindo que o retorno dos ativos siga uma distribuição normal. [Sharpe, 1964] introduz o CAPM (*Capital Asset Pricing Model*), fórmula linear capaz de relacionar o retorno de um determinado ativo ao risco sistemático e que é utilizada, preponderantemente, sob a hipótese de que a variância dos ativos financeiros é constante.

A definição de variância em uma população  $y_i$ , onde  $i=\{1,2,\dots,n\}$  , é dada por

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2, \quad (3.1)$$

onde  $\mu$  é a média da população.

As opções são um tipo de instrumento financeiro, em que o detentor do contrato possui o direito de comprar ou vender um determinado ativo-objeto (ativo subjacente do contrato), por um preço específico chamado *Strike* (preço de exercício), em uma data de vencimento, além de pagar um preço inicial para deter esse direito, chamado prêmio. Dividimos as opções em *Calls* (ou opções de compra) e *Puts* (ou opções de venda). Importante ressaltar que as opções podem ser americanas, garantindo ao detentor a possibilidade de exercer seu direito em qualquer momento do tempo e europeias, que são exercidas somente no vencimento – no presente trabalho, utilizaremos somente europeias. As opções são negociadas entre vendedores (ou lançadores) e compradores e pertencem a classe dos derivativos, ou seja, seu preço deriva de um ativo subjacente. Geralmente, possui duas finalidades principais: *Hedge* (proteção) ou alavancagem.

Para melhor compreender um contrato de opção, tracemos dois exemplos a respeito de sua dinâmica: um determinado investidor comprou 100 ações da empresa Ambev S.A. (B3: ABEV3), ao preço de BRL 25.00. Com receio de

eventuais oscilações negativas no preço, ele então decide comprar 100 *puts* de ABEV3, no *strike* BRL 25.00. Dessa forma, o investidor fez um *hedge* completo de seu portfólio, neutralizando qualquer queda do ativo subjacente. Vale lembrar que ao adquirir os contratos, o indivíduo teve um desembolso financeiro referente ao prêmio pago para deter o contrato. Um seguro de automóvel pode ser amplamente utilizado para exemplificar o caso acima: ao comprar um carro, geralmente, contrata-se um seguro, pagando um prêmio para que ele lhe garanta proteção em caso de eventuais problemas ou acidentes.

Suponhamos agora que o investidor está otimista com o mercado. ABEV3 está cotada à BRL 23.00 e ele acredita que vá subir porém, não possui disponibilidade de caixa para comprar ações diretamente no mercado à vista. Para solucionar esse problema, ele vende uma *put* de ABEV3 de *strike* BRL 20.00, contraindo a obrigação de comprar ABEV3 no futuro sob determinadas condições e, simultaneamente, compra uma *call* de *strike* BRL 25.00, recebendo o direito de comprar ABEV3, também sob certas circunstâncias. Na ótica dos fluxos financeiros, o investidor recebe o prêmio pela venda da *put* e se alavanca, utilizando esse caixa para financiar a compra de uma *call*. Caso, no vencimento, ABEV3 esteja cotada acima de BRL 25.00, o investidor será bem-sucedido pois sua *put* não será exercida pela contraparte e ele poderá exercer a *call*, comprando ABEV3 por um preço inferior ao de mercado. O oposto se verifica: caso ABEV3 esteja cotada abaixo de BRL 20.00 no vencimento do contrato, a contraparte exercerá seu direito, obrigando o investidor a comprar o ativo por um preço acima do corrente no mercado.

No primeiro caso, o investidor se utilizou das opções como um mecanismo de *hedge*, defendendo seu portfólio de eventuais quedas no preço dos ativos. No segundo, o investidor sem caixa disponível, utilizou-se de uma estrutura de opções (conjunto de opções) que, dado os seus riscos, possibilitou que ele participasse de uma eventual alta no preço do ativo subjacente. Vale lembrar que os casos acima têm somente a finalidade de exemplificar algumas situações e não contemplam custos transacionais, destoando da realidade.

A partir dos exemplos acima, entendemos um pouco da dinâmica dos contratos de opções. Avançando, podemos destacar a importância de uma precificação minuciosa: *spot*, tempo até o vencimento, *strike*, taxa básica de juros da economia no período do contrato, tipo da opção (*call* ou *put*) são alguns fatores que compõe o prêmio da opção. No entanto, um dos, se não o mais importante componente, é a volatilidade do ativo subjacente. Para entendermos a sua relevância no prêmio de um contrato, voltemos ao exemplo do seguro de automóveis: A seguradora, ao avaliar o valor do prêmio e com base nas características do segurado, precisa ser capaz de inferir a probabilidade de

um acidente ocorrer e com que frequência. Indivíduos que tendem a se envolver em mais acidentes e, por consequência, utilizam mais vezes o seguro, devem pagar um prêmio mais alto por ele. Por outro lado, indivíduos que são diligentes no trânsito e pouco se acidentam, deveriam ter seus prêmios reduzidos.

No artigo *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Black e Scholes, [Black e Scholes, 1973], derivam uma fórmula para precificação de opções que, posteriormente, foi aperfeiçoada por Robert Merton, [Merton, 1973]. Ela é uma função do *strike*, tempo até o vencimento, taxa de juros básica da economia, além do preço e volatilidade do ativo subjacente. Algumas premissas/condições ideais são assumidas:

1. A taxa de juros livre de risco é conhecida pelos participantes do mercado, sendo constante no período;
2. O ativo subjacente não distribui dividendos;
3. Não há custos de transação;
4. É possível vender à descoberto;

Além disso, uma das premissas centrais está acerca da volatilidade do ativo subjacente. Essa, por sua vez, é considerada constante, seguindo um movimento browniano geométrico e apresentando uma distribuição log-normal.

A equação analítica para calcular o preço de uma call para qualquer instante  $t$  é dada por:

$$C^{BS}(t, S, T, K, r, \sigma) = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \quad (3.2)$$

Onde  $S$  é o preço do ativo objeto,  $K$  é o *Strike*,  $r$  a taxa de juros livre de risco,  $\sigma$  a volatilidade histórica do ativo subjacente,  $(T - t)$  o número de dias até o vencimento e  $\Phi(d)$ , a função densidade acumulada normal, conforme (3.3),

$$\Phi(d) := \int_{-\infty}^d \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx, \quad (3.3)$$

e para  $d_1$  e  $d_2$ , temos:

$$d_1 = \frac{\log \frac{S}{Ke^{-r(T-t)}}}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t}, \quad (3.4)$$

$$d_2 = \frac{\log \frac{S}{Ke^{-r(T-t)}}}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t}, \quad (3.5)$$

Para mais detalhes sobre a fórmula de apreamento de uma *put*, bem como as respectivas derivações das equações acima, consulte [Saporito, 2023].

O modelo de Black-Scholes-Merton teve um grande impacto positivo para a área de finanças moderna, simplificando o apreamento das opções. No



entanto, em função de suas premissas e restrições, sabemos que a aplicabilidade da fórmula é limitada. Podemos exemplificar isso por meio da volatilidade implícita das opções negociadas no mercado.

De (3.4) e (3.5), temos o parâmetro da volatilidade como sendo o único que não é diretamente observado. A partir de (3.1), podemos encontrar a volatilidade histórica do ativo-objeto mas, na prática, conforme [Hull, 2002], sabemos que os participantes utilizam a volatilidade implícita. Em outras palavras, a partir de um dado preço para uma opção, podemos estimar, por meio de uma variação de (3.2), a volatilidade praticada pelos participantes do mercado. Isso reforça algumas das limitações do modelo BSM. Provamos isso empiricamente por meio da figura (3.1) que representa o *Volatility Skew*, ou seja, a distribuição das volatilidades implícitas para diferentes strikes do índice Standard & Poor's 500 (SPX), com vencimento para 02/10/2023.

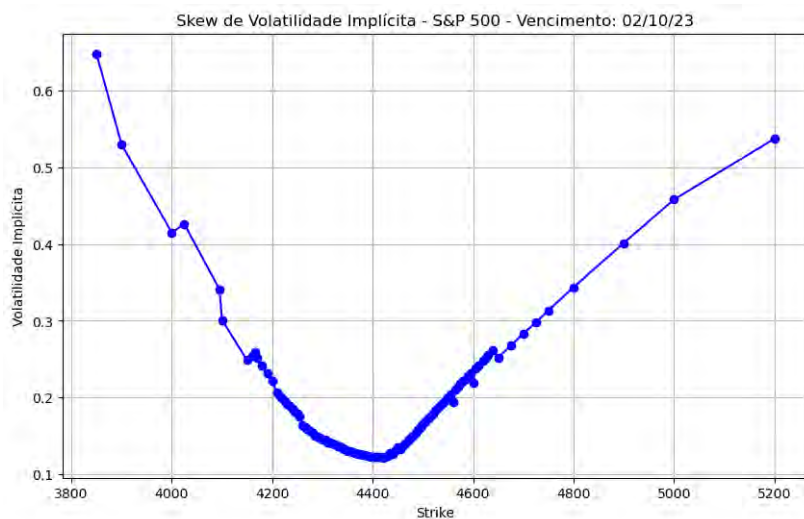


Figura 3.1: Skew de volatilidade das calls do índice SPX para o vencimento de 02/10/2023. Fonte: Elaboração própria.

Na figura (3.2), temos a estrutura à termo, uma forma de analisar, para diferentes vencimentos, o comportamento da volatilidade implícita de opções at-the-money (no dinheiro). Observe que a volatilidade auferida nas opções variam nos dois casos, strikes e vencimentos, o que corrobora com a violação da hipótese de volatilidade constante.

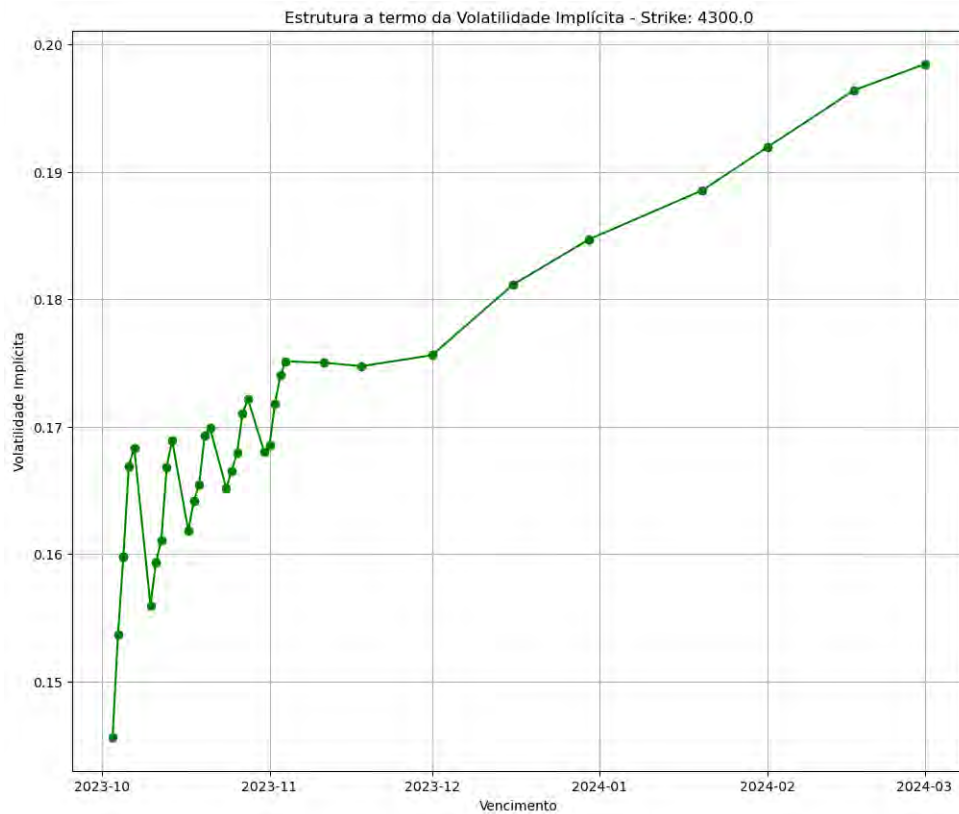


Figura 3.2: Estrutura à termo das Calls de SPX no strike 4300.0. Fonte: Elaboração própria.

[Mandelbrot, 1963] foi o primeiro a sugerir o fenômeno de *clustering* no retorno dos ativos financeiros. Isto é, períodos de grandes choques de preço e volatilidade tendem a se agrupar numa escala temporal, bem como movimentos de baixa volatilidade ou pequenos movimentos de preço também tendem a se agrupar. O fenômeno de *clustering* desafia o movimento geométrico browniano introduzido por Bachelier, no sentido que o retorno dos ativos não são i.i.d. – independentes e identicamente distribuídos.

[Cont, 2001] sugere que os preços dos ativos financeiros compartilham características e propriedades estatísticas comuns, chamadas de *stylized facts* (fatos estilizados).

[Ding, 2011] aponta cinco principais fatos estilizados associados à volatilidade de ativos financeiros, sendo elas: a) *fat tails and excessive kurtosis* (Caudas gordas e curtose excessiva); b) *volatility clustering* (*Clustering* de volatilidade); c) *long memory* (Memória longa); d) *leverage effect* (Efeito de alavancagem); e) *Spillover Effect* (Efeito de propagação).

Nessa linha, a ideia de que a variância dos ativos financeiros era constante e independente (homocedasticidade ou homogeneidade da variância) e, caracterizada por uma distribuição normal tornou-se ultrapassada, intensificando-se então a busca por modelos que melhor explicassem a heterocedasticidade pre-

sente nos retornos, isto é, a heterogeneidade da variância.

[Engle, 1982] sugere o modelo ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) que leva em consideração a presença de heterocedasticidade condicional, sendo capaz de capturar a natureza dinâmica e não linear da volatilidade das séries temporais analisadas. Posteriormente, [Bollerslev, 1986] introduziu o modelo GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*), permitindo uma estrutura de defasagem (*lag*) mais flexível. [Ding et al., 1993] investigam uma das características mencionadas anteriormente: a memória longa, sugerindo um novo modelo A-PARCH (*Asymmetric Power Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) para melhor capturá-lo.

Dando continuidade ao trabalho de [Ding, 2011], o capítulo que se segue representará uma revisão bibliográfica acerca das características descritas acima associadas a volatilidade dos ativos financeiros, bem como dos modelos econométricos citados. Depois, será feito um estudo empírico sobre o Ibovespa (Ibov) e as três ações com maior peso no índice: Petrobras (B3: PETR4), Vale (B3: VALE3) e Itaú (B3: ITUB4). Por fim, a conclusão do experimento realizado.

## 4

### Volatilidade e os fatos estilizados

[Cont, 2001] destaca o censo comum onde pensa-se, ingenuamente, que o conjunto composto pela variação dos preços de ativos de diferentes classes como, por exemplo, o futuro de soja, MXN (peso mexicano) e ações da Ambev (B3: ABEV3) não possuem interseção nas propriedades de seus respectivos retornos. No entanto, como levantado pelo autor, uma grande quantidade de estudos empíricos demonstraram a existência de características comuns, persistentes no tempo. Tais características são chamadas de fatos estilizados. Em outras palavras, resume-se à interseção das características apresentadas nos retornos dos ativos financeiros de diferentes classes, ao longo do tempo. No presente trabalho veremos cinco desses fatos associados à volatilidade.

#### 4.1

##### Caudas Gordas e Curtose excessiva

Os modelos econométricos, por muitas vezes, assumem que o retorno dos ativos se comportam como um *Random Walk* (passeio aleatório), sob duas hipóteses: 1) os retornos são variáveis aleatórias independentes; 2) seguem uma determinada distribuição de probabilidade. Em muitos casos, como inicialmente no modelo BSM, utilizou-se uma distribuição normal, o que permite aplicar alguns teoremas como o limite central. No entanto, sabemos que uma das características presentes nos retornos dos ativos financeiros é a presença de caudas gordas: o lento decaimento assintótico na sua função densidade de probabilidade. Podemos verificar por meio da curtose das distribuições, medida estatística capaz de nos indicar o grau de achatamento e afilamento da curva, quando comparada à uma normal. [Cont, 2001], demonstra a presença de curtose excessiva (ou leptocurtose), obtendo valores superiores à 0 em seus testes estatísticos, indicando que a distribuição sugerida possuía um padrão de caudas gordas e picos altos, concentrada em torno da média, sugerindo maior probabilidade da ocorrência de *outliers* (eventos extremos). [Mandelbrot, 1963], critica a capacidade dessa distribuição normal ser utilizada para modelar o retorno dos ativos financeiros e sugere a introdução de uma distribuição *stable-paretian*, estudada inicialmente por Paul Lévy - chamada, também, distribuição de Lévy

- e é caracterizada, principalmente, por caudas gordas que, por sua vez, são vistas em distribuições que assumem variância infinita, conforme descrito por Mandelbrot.

## 4.2

### Clustering de volatilidade

O passeio aleatório sustenta uma série de hipóteses, tal como a independência das observações em uma série de preço - o preço de amanhã, independe do preço de hoje. No entanto, sabe-se que essa teoria não é aplicável, assim como a independência dos retornos. [Cont, 2001] destaca que simples funções não-lineares dos retornos apresentam correlação positiva ou persistência. Esse fenômeno, chamado de *Volatility Clustering* (Clustering de volatilidade), foi também estudado por [Mandelbrot, 1963]: "In other words, large changes tend to be followed by large changes - of either sign - and small changes tend to be followed by small change".

## 4.3

### Memória longa

[Fama, 1970] introduz a teoria do mercado eficiente, sugerindo a hipótese de que o retorno dos ativos possuem uma pequena correlação serial. [Taylor, 1986] estuda as séries de preços concluindo que, quando analisadas em valores absolutos (módulo) ou quadráticas, elas apresentam a característica de memória longa, com grande autocorrelação para longas defasagens. Supondo que o retorno de um ativo é dado por:  $r_t = \mu + \epsilon_t$ , em que  $\mu$  é o retorno esperado do ativo e  $\epsilon_t$ , um processo ruído branco. Além de ser não-correlacionado,  $\epsilon_t$  precisa ser serialmente independente, ou seja, não depender de outros valores do passado. [Ding et al., 1993], demonstram empiricamente o efeito da memória longa nos retornos. Em outras palavras, eles identificaram que  $|\epsilon_t|^d$  apresenta constantemente, para diversos valores de  $d$ , autocorrelação forte e persistente. Para solucionar esse problema da heterocedasticidade condicional, foi desenvolvido o modelo *Asymmetric Power ARCH* (A-PARCH) permitindo modelar o impacto de choques positivos e negativos na volatilidade condicional. [Crato and Lima, 1994] mostram que seus testes, quando aplicados ao retorno dos ativos, não rejeitam a existência de uma memória curta ou inexistente. Mas ao analisar as séries quadráticas, constatou-se a presença de memória longa nos retornos diários. [Bollerslev and Mikkelsen, 1996] encontram evidências empíricas que o fenômeno de memória longa nas séries de retornos dos ativos financeiros é melhor descrito por um processo *fractionally integrated*,  $I(d)$ , onde  $1 > d > 0$ . Eles propõem o modelo *Fractionally Integrated GARCH*

ou  $FIGARCH(p, d, q)$ , em que  $d = 0$  pode ser representado por um modelo  $GARCH(p, q)$  e  $d = 1$ ,  $IGARCH(p, q)$ . A flexibilidade do intervalo descrito acima para  $d$  será importante, permitindo a modelagem da dependência de uma longa memória na volatilidade condicional.

#### 4.4

##### Efeitos de alavancagem

O fenômeno do *leverage effect*, estudado por [Christie, 1982] e [Black, 1976], diz respeito a relação existente entre o preço de um ativo e sua volatilidade - negativamente correlacionados. [Christie, 1982] denota o desvio padrão de um determinado ativo por

$$\sigma_{S,t} = \sigma_v(1 + LR_t), \quad (4.1)$$

em que  $LR_t = D/S(V)$  representa a razão de alavancagem financeira de uma companhia,  $t$  denota tempo, e  $D, S, V$  denotam dívida, *equity* e valor de mercado, respectivamente. Assim, um efeito negativo no *equity* - preço do ativo - leva a uma queda no valor da firma. A razão de alavancagem financeira da empresa, mantendo o nível de dívida constante, aumenta implicando num maior nível de risco e, por consequência, maior volatilidade. [Bollerslev et al., 2006] argumenta sobre um outro fenômeno que explicaria uma possível relação entre a volatilidade e o retorno dos ativos: *volatility feedback* (efeito de retroalimentação da volatilidade) associado a uma correlação negativa existente entre a volatilidade e o retornos atuais e passados de um determinado ativo. A lógica é que se atribuirmos um preço a volatilidade, um aumento antecipado na volatilidade, implica no aumento da sua taxa de retorno necessária, levando a um ajuste negativo nos preços, permitindo retornos futuros mais altos. Quando analisamos as duas abordagens, temos que no *leverage effect* os preços causam a volatilidade, enquanto no *volatility feedback*, o efeito ocorre da volatilidade para os preços.

#### 4.5

##### Efeito de Spillover

O *spillover effect* é um tipo de externalidade que introduz um efeito indireto a um experimento ou evento. Esse fenômeno é observado em diferentes tipos de pesquisas científicas e podemos pensá-lo na economia da seguinte forma: um país A exporta bens para o país B. O país B decide por implementar uma política monetária contracionista, restringindo o consumo agregado de bens do país B, afetando o país A indiretamente. Esse fenômeno, principalmente na economia, se intensificou com a globalização. [Bae and Karolyi, 1994], analisam a

volatilidade dos retornos do S&P 500 (EUA) e o Nikkei 225 (Japão), adaptando o modelo GARCH para cenários assimétricos positivos e negativos, buscando capturar o efeito de *spillover*. As evidências demonstram que os choques e a persistência do efeitos de transmissão entre os países é significativa e quando ignorada, podendo subestimar o modelo. Em [Li and Giles, 2015], analisam os choques e os efeitos de transmissão dos links criados entre países desenvolvidos - EUA e Japão - e países emergentes - China, Índia, Indonésia, Malásia, Filipinas e Tailândia. Nos exemplos analisados, os autores encontraram evidências robustas, no curto e longo prazo sobre as externalidades e transmissões gerada pelos EUA que impactam os demais países emergentes e o Japão.

## 5 Modelos Estocásticos de Volatilidade

Os modelos econométricos tradicionais utilizados para modelar a volatilidade dos ativos financeiros usualmente consideravam a variância constante denotado por  $var(\epsilon_t) = \sigma^2$ , em que  $\epsilon_t$  é um processo ruído branco de esperança igual a zero e independente no tempo. No entanto, conforme discutido anteriormente, existem inúmeras evidências, teóricas e empíricas, capazes de refutar a ideia de um processo estacionário. Veremos a seguir a evolução dos modelos estocásticos capazes de capturar, entre outros fatos estilizados, a heterocedasticidade presente nos retornos dos ativos.

### 5.1 Modelo ARCH

[Engle, 1982] introduz o modelo ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) que assume a variância condicional de uma série temporal como sendo uma função linear dos quadrados das observações passadas. Analogamente, em uma série temporal dos retornos de um ativo financeiro, modela-se a volatilidade condicional, onde essa será autoregressiva e dependente de eventos passados. Seguindo a notação de Engle, o modelo é dado por:

$$\begin{aligned}y_t|\psi_{t-1} &\sim N(x_t\beta, h_t), \\h_t &= h(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \epsilon_{t-p}, \alpha), \\ \epsilon_t &= y_t - x_t\beta\end{aligned}\tag{5.1}$$

O modelo é obtido assumindo que a média de  $y_t$  é dada por  $x_t\beta$ , uma combinação linear das defasagens de variáveis endógenas e exógenas, inclusas em  $\psi_{t-1}$ . Podemos generalizar a função da variância, incluindo valores atuais e defasados de  $x$ . A função de  $h$  pode ser escrita como:

$$h_t = h(\psi_{t-1}, \alpha)\tag{5.2}$$



## 5.2

### Modelo GARCH

Buscando capturar o efeito de longa memória presente nas séries temporais de preço, bem como flexibilizar a estrutura de defasagens, [Bollerslev, 1986] sugere uma generalização do modelo ARCH: *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic* (GARCH). Supondo que  $\epsilon_t$  é um processo estocástico e  $\psi_t$  representa o conjunto de informações disponíveis até o tempo  $t$ , Bollerslev denota um processo  $GARCH(p, q)$  como sendo

$$\epsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t), \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=0}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=0}^p \beta_i h_{t-i} \\ &= \alpha_0 + A(L)\epsilon_t^2 + B(L)h_t, \end{aligned} \quad (5.4)$$

em que

$$\begin{aligned} p &> 0, & q &> 0, \\ \alpha_0 &> 0, & \alpha_i &\geq 0, & i &= 1, \dots, q, \\ \beta_i &\geq 0, & i &= 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Bollerslev destaca ainda que um processo  $GARCH(p, q)$  onde  $p = 0$ , é equivalente a um processo  $ARCH(q)$  e um processo  $GARCH(p, q)$  onde  $p = q = 0$ ,  $\epsilon_t$  passa a ser considerado um processo ruído branco.

## 5.3

### Generalizações do modelo GARCH

Veremos brevemente algumas generalizações do modelo GARCH. A generalização de um modelo constitui na inclusão de novos termos para melhor capturar determinados fatos observados nas séries temporais. No nosso caso, as variações do modelo GARCH para melhor capturar um ou outro fato estilizado abordado anteriormente.

### 5.3.1

#### Modelo EGARCH

[Nelson, 1991] aponta três grandes problemas observados em modelos GARCH: i) o modelo é capaz de capturar a magnitude de um choque, mas não seu sinal (positivo ou negativo), não considerando o efeito de alavancagem

observado por [Black, 1976] - preço e volatilidade são negativamente correlacionados; ii) limitações do modelo GARCH referente a alguns coeficientes prejudicam a estimação dos parâmetros; iii) dificuldade de capturar a persistência na variância condicional. Nelson propõe um modelo utilizando o valor absoluto dos resíduos e não o quadrado dos retornos, permitindo tratar os diferentes choques de forma distinta. Seguindo a notação do autor, o processo é dado por

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_t + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k g(z_{t-k}), \quad \beta_1 \equiv 1, \quad (5.5)$$

$$g(z_t) \equiv \theta z_t + \gamma[|z_t| - E|z_t|]$$

Repare que Nelson introduz o logaritmo natural sobre a variância condicional, aumentando a capacidade do modelo de capturar os efeitos de persistência presentes na série.

### 5.3.2

#### Modelo GJR-GARCH

[Glosten et al., 1993] introduzem o modelo GJR-GARCH (*Generalized Jump Robust GARCH*) permitindo capturar padrões sazonais na volatilidade e impactos diferentes de acordo com o sinal (positivo ou negativo) do retorno. O modelo é uma modificação do modelo GARCH-M (GARCH-in mean) sugerido por [Engle and Lee, 1999] que, por sua vez, é uma extensão do modelo ARCH, onde os autores sugerem a incorporação da volatilidade condicional na média dos retornos. O modelo GJR-GARCH é denotado por

$$\sigma_t^2 = \omega + (\alpha + \gamma I_{t-1}) \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (5.6)$$

em que

$$I_{t-1} := \begin{cases} 0 & \text{se } r_{t-1} \geq \mu \\ 1 & \text{se } r_{t-1} < \mu \end{cases}$$

[Naimy et al., 2021] destacam que os choques de diferentes sinais impactam diferentemente a volatilidade - quando positivo,  $I = 0$ , e o efeito do choque será estimado por  $\alpha_t$ . Em caso negativo,  $I = 1$  e o valor estimado do choque sobre a volatilidade passa a ser dado por  $\alpha_t + \gamma_t$ . Quando comparado ao modelo EGARCH, o modelo GJR-GARCH se diferencia, entre outros aspectos, por ser capaz de capturar o efeito de alavancagem, quando choques negativos possuem maior impacto na volatilidade.

## 5.4

### Modelo APARCH

O modelo APARCH (*Asymmetric Power ARCH*) é o foco principal do presente trabalho e será o último modelo discutido. [Ding et al., 1993] investigam o fenômeno da memória longa atribuída ao retorno dos ativos. Assumindo que o retorno de um ativo é dado por  $r_t = \mu + \epsilon_t$ , onde  $\mu$  é o retorno esperado e  $\epsilon_t$ , um processo ruído branco, os autores sugerem que  $|\epsilon_t|^d$  apresenta forte autocorrelação para vários valores de  $d$  (memória longa), diferindo dos modelos ARCH tradicionais que consideram o quadrado dos retornos para estimar a variância. De forma geral, o modelo é capaz de capturar fenômenos de caudas gordas, curtose excessiva, efeito de alavancagem e memória longa. [Ding, 2011] denota o modelo por

$$y_t = x_t \xi + \epsilon_t \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (5.7)$$

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j (|\epsilon_{t-j}| - \gamma_j \epsilon_{t-j})^\delta + \sum_{i=1}^p \beta_i (\sigma_{t-i})^\delta, \quad (5.8)$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, z_t \sim N(0, 1),$$

$$k(\epsilon_{t-j}) = |\epsilon_{t-j}| - \gamma_j \epsilon_{t-j}$$

onde  $\xi, \omega, \alpha_j, \gamma_j, \beta_i$  e  $\delta$  são os parâmetros a serem estimados no modelo. Repare que a equação possui algumas restrições:

1.  $\omega > 0, \alpha_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ),  $\beta_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ )

- Quando  $\alpha_j = 0$  e  $\beta_i = 0$ , então  $\sigma_t^2 = \omega$

2.  $0 \leq \sum_{j=1}^q \alpha_j + \sum_{i=1}^p \beta_i \leq 1$

Repare também que  $\gamma_j$  representa o efeito de alavancagem de forma análoga ao modelo GJR-GARCH. Quando  $\gamma > 0$ , então o efeito de choques negativos sobre a volatilidade será maior do que o de choques positivos.  $\delta$  denota também o efeito de alavancagem, determinando o grau de não linearidade do modelo, permitindo capturar diferentes assimetrias presentes na volatilidade condicional. O efeito de persistência é capturado no modelo, dado por  $\alpha + \beta$ .

## 6

### Aplicação Empírica

#### 6.1

##### Índice Bovespa

O primeiro ativo a ser analisado é o Ibovespa. O índice Bovespa foi criado em 1968, sendo o principal indicador de performance das ações negociadas na B3. É reavaliado a cada quadrimestre e os ativos que compõem a carteira teórica são selecionados de acordo com os seguintes critérios: relevância no índice de negociabilidade, presença em pregão, volume negociado, não ser penny stock (ações de pequenas empresas que são negociadas abaixo de BRL 1,00). Somente ações e Units de ações contemplam o universo de ativos elegíveis além de serem ponderadas pelo valor de mercado do *free float* (ações em circulação)<sup>1</sup>. Analisaremos os retornos diários do índice de 1993-04-28 até 2023-10-31. Os dados foram obtidos do Yahoo Finance, por meio do pacote tidyquant do R<sup>2</sup>.

Denotaremos por  $p_t$ , o preço de fechamento do Ibovespa. Para o retorno diário, com base em evidências empíricas, definimos por  $r_t = 100 * (\log(p_t) - \log(p_{t-1}))$ , sendo comum assumir que é fracamente estacionário.

A figura 6.1 representa a evolução de  $p_t$  nos períodos de 1993-04-28 até 2023-10-31. Repare que o movimento representa uma tendência de alta, com possíveis quebras estruturais.

As figuras 6.2 e 6.3 representam  $r_t$  e  $|r_t|$ , respectivamente. É possível perceber na figura 6.2 que o retorno fica entorno de uma média. No entanto, apresenta diversos pontos de desvio significativo. Isso fica mais evidente na figura 6.3, onde visualizados grandes momentos de volatilidade, seguido por outros momentos de proporção parecida. O mesmo se verifica para momentos de menor volatilidade. [Mandelbrot, 1963] argumenta sobre esse fato estilizado: clustering de volatilidade ou agrupamento de volatilidade. Repare que temos 4 grandes momentos de maior volatilidade: Antes de Jan-96, antes de Jan-

<sup>1</sup>[https://www.b3.com.br/pt\\_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/ibovespa.htm](https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/ibovespa.htm)

<sup>2</sup><https://cran.r-project.org/web/packages/tidyquant/index.html>



Figura 6.1: Evolução do índice Bovespa, com base no seu preço de fechamento ( $p_t$ ), de 1993-04-28 até 2023-10-31.

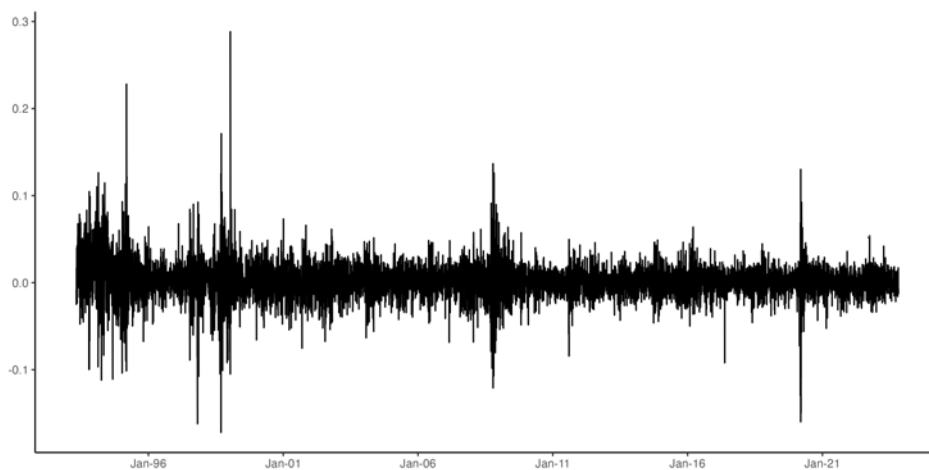


Figura 6.2: Retornos diários ( $r_t$ ) do Ibovespa, de 1993-04-28 até 2023-10-31.

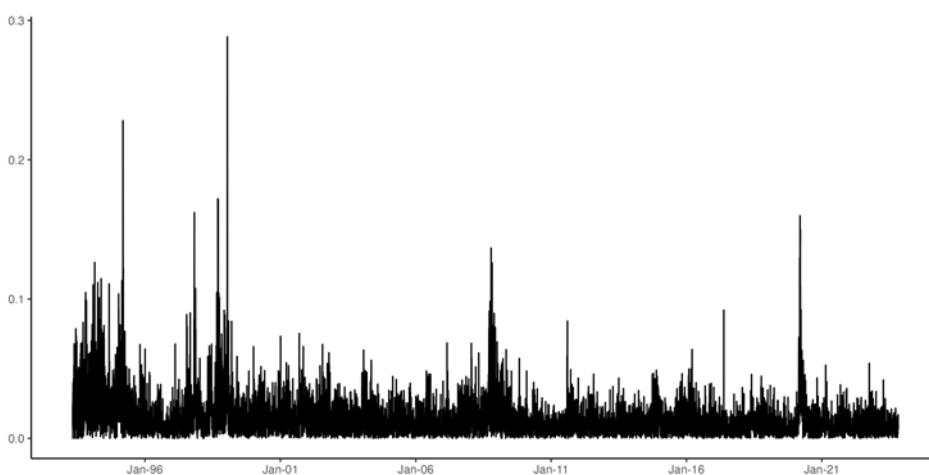


Figura 6.3: Retornos diários absolutos ( $|r_t|$ ) do Ibovespa, de 1993-04-28 até 2023-10-31.

01, antes de Jan-11 e antes de Jan-21. Em volta desses 4 pontos, percebe-se uma grande perturbação (desvio da média), maior que o observado no restante da série, corroborando com a presença de clusters de volatilidade em séries financeiras.

A tabela 6.1 nos mostra as estatísticas descritivas de  $r_t$  e  $|r_t|$ . Analisando a tabela, podemos identificar que ambas as séries possuem uma curtose muito elevada, superior ao nível da distribuição normal (curtose = 3). Isso indica a presença de caldas gordas na distribuição das séries.

Tabela 6.1: Estatísticas descritivas - Ibovespa

Série	Nro. Obs.	Max	Min	Média	Desvio Padrão	Skewness	Kurtosis
$r_t$	7552	0,28832	-0,17208	0,00112	0,02172	0,35631	11,50436
$ r_t $	7552	0,28832	0	0,01486	0,01588	3,65571	28,37549

Vamos analisar o teste de autocorrelação em  $r_t$ ,  $|r_t|$  e  $r_t^2$  do Ibovespa. Os resultados obtidos podem ser testados ante um intervalo de confiança de 95%, calculado por  $\pm 1.96/\sqrt{T}$ , onde  $T = 7552$ . Por tanto, o intervalo de confiança de 95% é  $\pm 0.022554$ . A tabela 6.2 traz o teste de autocorrelação indo de 1 até 100 *Lags* (defasagens). Observando a primeira defasagem de  $r_t$ ,  $|r_t|$  e  $r_t^2$  e comparando com o intervalo de confiança, concluímos que os valores estão fora do intervalo de confiança de 95%, principalmente  $|r_t|$  e  $r_t^2$ , indicando a presença de autocorrelação serial. Podemos dizer que a série temporal do Ibovespa não é um processo i.i.d. (independente e identicamente distribuído), justificando a utilização dos modelos da família ARCH.

Tabela 6.2: Teste de autocorrelação - Ibovespa

Lag	ACF - $r_t$	ACF - $ r_t $	ACF - $r_t^2$
1	0,032104	0,29899	0,249096
12	0,036431	0,259573	0,146884
23	-0,009938	0,185287	0,069103
34	0,023066	0,178393	0,070095
45	0,01524	0,148673	0,050222
56	0,005131	0,128798	0,048345
67	0,028131	0,128463	0,048469
78	0,011546	0,131952	0,051633
89	0,00794	0,120921	0,062076
100	0,011571	0,099257	0,028038

Utilizaremos a linguagem R e o software RStudio para estimar os modelos de volatilidade sugeridos, bem como realizar suas comparações. Os modelos a serem testados são GARCH(1,1) e APARCH(1,1), e as distribuições normal, t-student e t-student assimétrica. Posteriormente, vamos comparar o modelo que melhor se encaixa para descrever o comportamento das séries por meio dos

critérios de informação AIC (*Akaike Information Criterion*) e BIC (*Bayesian Information Criterion*), principalmente.

A tabela 6.3 apresenta os parâmetros estimados do modelo GARCH(1,1), todos significantes estatisticamente, para as três distribuições propostas: Normal, T-Student e T-Student Assimétrica.

Tabela 6.3: Estimação dos parâmetros para um modelo GARCH(1,1) - Ibovespa

Parâmetros	Normal	T-Student	T-Student Assimétrica
$\mu$	0,000891 (0,000178)	0,001007 (0,000173)	0,000826 (0,000178)
$\omega$	0,000006 (0,000001)	0,000005 (0,000001)	0,000005 (0,000001)
$\alpha_1$	0,09401 (0,006923)	0,085158 (0,00734)	0,083936 (0,007175)
$\beta_1$	0,891208 (0,007808)	0,901739 (0,008048)	0,903769 (0,007838)
Skew		9,275447 (0,85827)	0,929307 (0,015544)
Shape			9,597416 (0,919576)

A tabela 6.4 apresenta os critérios de informação para as três distribuições utilizadas. O modelo que apresenta menor valor nos critérios AIC e BIC e portanto tem melhor *fit* é o GARCH(1,1) com a distribuição T-Student assimétrica.

Tabela 6.4: Critérios de informação para um modelo GARCH(1,1) - Ibovespa

Critérios	Normal	T-Student	T-Student Assimétrica
LogLikelihood	-19778,249778	-19880,218047	-19889,842454
AIC	-5,236825	-5,263564	-5,265848
BIC	-5,233154	-5,258976	-5,260343
SIC	-5,236825	-5,263565	-5,265849
HQIC	-5,235565	-5,261989	-5,263958
MSE	0,000147	0,000147	0,00015
MAE	0,007248	0,007337	0,007429
RMSE	0,012106	0,012139	0,01223

A tabela 6.5 apresenta os parâmetros estimados para o modelo APARCH(1,1), todos são estatisticamente significantes nas três distribuições propostas: Normal, T-Student e T-Student Assimétrica.

Por meio da tabela 6.6, podemos analisar os critérios de informação que nos auxiliam a comparar o modelo APARCH sob as três distribuições utilizadas. Apesar do modelo APARCH(1,1) sob a distribuição T-Student assimétrica

Tabela 6.5: Estimação dos parâmetros para um modelo APARCH(1,1) - Ibovespa

Parâmetros	Normal	T-Student	T-Student Assimétrica
$\mu$	0,00061 (0,000181)	0,0008 (0,000175)	0,000643 (0,000179)
$\omega$	0,00002 (0,000003)	0,000019 (0,000003)	0,000018 (0,000003)
$\alpha_1$	0,096308 (0,00755)	0,089941 (0,007941)	0,089402 (0,007878)
$\gamma_1$	0,199699 (0,026206)	0,216612 (0,03203)	0,206075 (0,031491)
$\beta_1$	0,896477 (0,007562)	0,904419 (0,00798)	0,906059 (0,007829)
$\delta$	1,697707 (0,152247)	1,678349 (0,167227)	1,682273 (0,167182)
Skew		9,590987 (0,911312)	0,93569 (0,015776)
Shape			9,807988 (0,954943)

apresentar um menor valor para o *LogLikelihood* (log-verossimilhança) o que a torna pior, comparativamente, nesse aspecto, ela por outro lado apresenta um menor valor nos critérios de informação AIC e BIC, demonstrando que possui um melhor *fit*.

Tabela 6.6: Critérios de informação para um modelo APARCH(1,1) - Ibovespa

Critérios	Normal	T-Student	T-Student Assimétrica
LogLikelihood	-19807,947686	-19903,24224	-19910,746415
AIC	-5,24416	-5,269132	-5,270854
BIC	-5,238654	-5,262709	-5,263514
SIC	-5,244161	-5,269134	-5,270857
HQIC	-5,24227	-5,266927	-5,268335
MSE	0,000133	0,000134	0,000136
MAE	0,006841	0,006891	0,006992
RMSE	0,011539	0,011562	0,011679

Após analisar os modelos individualmente, podemos compará-los a fim de decidir qual o mais adequado para modelar a volatilidade condicional do Ibovespa. Tanto o modelo GARCH(1,1) como o APARCH(1,1) tem um *fit* melhor sob a distribuição T-Student Assimétrica. Comparando então os critérios de infomação AIC e BIC dos dois modelos, podemos concluir que o modelo APARCH(1,1) possui menor valor em ambos os critérios, tornando-o melhor para descrever, modelar e prever a série.



## 6.2 Petrobras

O segundo ativo a ser analisado é a Petrobras. A Petróleo Brasileiro S.A. (B3: PETR4) foi criada em 1953 pelo então presidente brasileiro Getúlio Vargas visando monopolizar o petróleo brasileiro em todas as suas etapas de produção, exceto distribuição. Atualmente, a empresa tem como acionista majoritário a União, uma receita de BRL 641.00 bilhões e produção de 2.15 milhões de barris de óleo por dia<sup>3</sup>. Ela figura como a segunda maior participação no Índice Bovespa, o índice referência de performance para o mercado acionário brasileiro<sup>4</sup>. Analisaremos os retornos diários de PETR4 de 2000-01-03 até 2023-10-31. Os dados foram obtidos do Yahoo Finance, por meio do pacote tidyquant do R<sup>5</sup>.

Denotaremos por  $p_t$ , o preço de fechamento de PETR4. Para o retorno diário, com base em evidências empíricas, definimos por  $r_t = 100 * (\log(p_t) - \log(p_{t-1}))$ , sendo comum assumir que é fracamente estacionário.



Figura 6.4: Evolução da PETR4, com base no seu preço de fechamento ( $p_t$ ), de 2000-01-03 até 2023-10-31.

A figura 6.4 representa a evolução de  $p_t$  nos períodos de 2000-01-03 até 2023-10-31. Podemos observar um comportamento bastante irregular, com diversas possibilidades de quebras estruturais ao longo da série. Analisando o período mais recente e comparando ao Índice Bovespa, pode-se notar crescimento quase exponencial de PETR4.

As figuras 6.5 e 6.6 representam  $r_t$  e  $|r_t|$ , respectivamente. É possível perceber na figura 6.5 que o retorno fica entorno de uma média. No entanto,

<sup>3</sup><https://petrobras.com.br/quem-somos/perfil>

<sup>4</sup>Referente a carteira de 2023-11-29

<sup>5</sup><https://cran.r-project.org/web/packages/tidyquant/index.html>

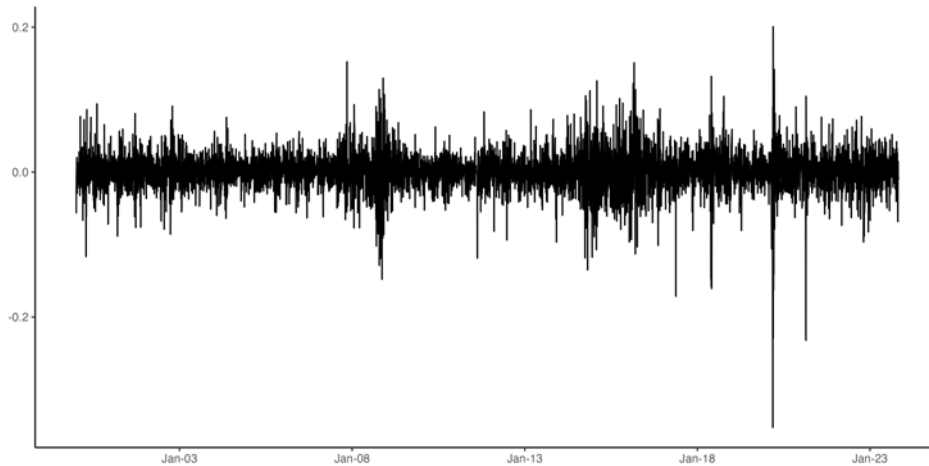


Figura 6.5: Retornos diários ( $r_t$ ) da PETR4, de 2000-01-03 até 2023-10-31.

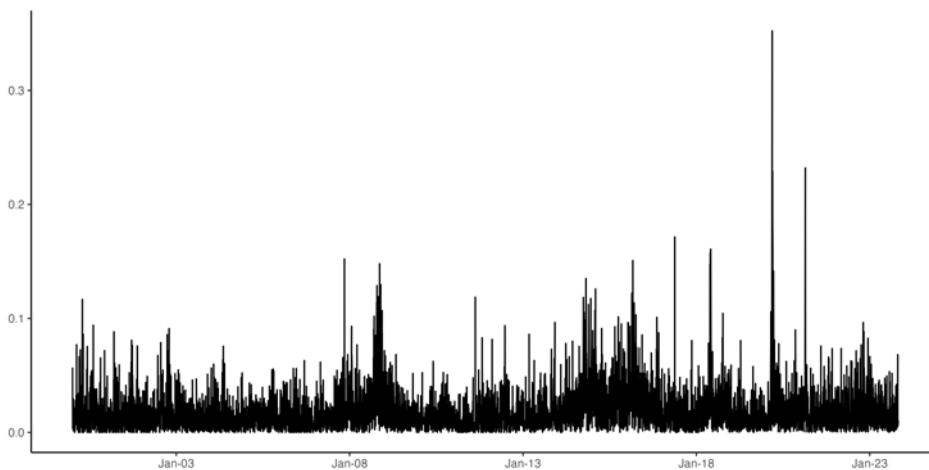


Figura 6.6: Retornos diários absolutos ( $|r_t|$ ) da PETR4, de 2000-01-03 até 2023-10-31.

apresenta diversos pontos de desvio significativo. Isso fica mais evidente na figura 6.6, onde visualizados grandes momentos de volatilidade, seguido por outros momentos de proporção parecida. Repare que temos 3 grandes momentos de maior volatilidade: Após Jan-08, antes de Jan-18 e antes de Jan-23. Em volta desses 3 pontos, percebe-se uma grande perturbação (desvio da média), maior que o observado no restante da série, corroborando com a presença de clusters de volatilidade em séries financeiras.

A tabela 6.7 nos mostra as estatísticas descritivas de  $r_t$  e  $|r_t|$  de PETR4. Analisando a tabela, podemos identificar que ambas as séries possuem uma curtose muito elevada, superior ao nível da distribuição normal (curtose = 3). Isso indica a presença de caldas gordas na distribuição das séries.

Vamos analisar o teste de autocorrelação em  $r_t$ ,  $|r_t|$  e  $r_t^2$  de PETR4. Os resultados obtidos podem ser testados ante um intervalo de confiança de 95%, calculado por  $\pm 1.96/\sqrt{T}$ , onde  $T = 5985$ . Por tanto, o intervalo de confiança

Tabela 6.7: Estatísticas descritivas - PETR4

Série	Nro. Obs.	Max	Min	Média	Desvio Padrão	Skewness	Kurtosis
$r_t$	5985	0,20067	-0,35237	0,00053	0,02685	-0,66163	10,67325
$ r_t $	5985	0,35237	0	0,01853	0,01945	3,4087	27,29414

de 95% é  $\pm 0.025335$ . A tabela 6.8 traz o teste de autocorrelação indo de 1 até 100 *Lags* (defasagens). Observando a primeira defasagem de  $r_t$ ,  $|r_t|$  e  $r_t^2$  e comparando com o intervalo de confiança concluímos que, apesar da estatística de teste da série  $r_t$  ser menor do que o intervalo de confiança, tanto  $|r_t|$  como  $r_t^2$  são consideravelmente superiores. A partir disso, podemos considerar que PETR4 apresenta um processo serialmente correlacionado, justificando a utilização de modelos da família ARCH.

Tabela 6.8: Teste de autocorrelação - PETR4

Lag	ACF - $r_t$	ACF - $ r_t $	ACF - $r_t^2$
1	-0,013496	0,219926	0,237942
12	-0,007881	0,157915	0,087872
23	-0,02534	0,131776	0,042044
34	-0,001746	0,098128	0,036098
45	-0,023753	0,093087	0,028216
56	0,01311	0,061007	0,010771
67	0,007069	0,082334	0,028094
78	-0,008906	0,054786	0,006877
89	-0,005739	0,056064	0,014159
100	2,9e-05	0,055966	0,012748

Utilizaremos a linguagem R e o software RStudio para estimar os modelos de volatilidade sugeridos, bem como realizar suas comparações. Os modelos a serem testados são GARCH(1,1) e APARCH(1,1), e as distribuições normal, t-student e t-student assimétrica. Posteriormente, vamos comparar o modelo que melhor se encaixa para descrever o comportamento das séries por meio dos critérios de informação AIC (*Akaike Information Criterion*) e BIC (*Bayesian Information Criterion*), principalmente.

A tabela 6.9 apresenta os parâmetros estimados do modelo GARCH(1,1), todos significantes estatisticamente, para as três distribuições propostas: Normal, T-Student e T-Student Assimétrica.

A tabela 6.10 apresenta os critérios de informação para as três distribuições utilizadas. O modelo que apresenta menor valor nos critérios AIC e BIC e portanto tem melhor *fit* é o GARCH(1,1) com a distribuição T-Student, diferentemente do que foi visto no caso do Ibovespa.

Tabela 6.9: Estimação dos parâmetros para um modelo GARCH(1,1) - PETR4

Parâmetros	Normal	T-Student	T-Student Assimétrica.
$\mu$	0,001026 (0,000282)	0,001055 (0,000257)	0,000977 (0,000279)
$\omega$	0,00002 (0,000003)	0,000012 (0,000003)	0,000012 (0,000003)
$\alpha_1$	0,088808 (0,007591)	0,075188 (0,008875)	0,074818 (0,008847)
$\beta_1$	0,881624 (0,010464)	0,908885 (0,010598)	0,909302 (0,010575)
Skew		5,49786 (0,386535)	0,987466 (0,017014)
Shape			5,513448 (0,389161)

Tabela 6.10: Critérios de informação para um modelo GARCH(1,1) - PETR4

Critérios	Normal	T-Student	T-Student Assimétrica
LogLikelihood	-13885,013153	-14105,621608	-14105,890129
AIC	-4,638601	-4,711987	-4,711743
BIC	-4,634125	-4,706392	-4,705029
SIC	-4,638602	-4,711989	-4,711745
HQIC	-4,637046	-4,710044	-4,709411
MSE	0,000092	0,0001	0,0001
MAE	0,00572	0,006028	0,006023
RMSE	0,009575	0,010006	0,01

Parâmetros	Normal	T-Student	T-Student Assimétrica
$\mu$	0,000629 (0,00029)	0,000841 (0,000254)	0,000743 (0,000278)
$\omega$	0,000052 (0,000007)	0,000213 (0,000044)	0,000211 (0,000043)
$\alpha_1$	0,085366 (0,007728)	0,081416 (0,008865)	0,080975 (0,008849)
$\gamma_1$	0,247738 (0,04229)	0,304649 (0,061682)	0,307093 (0,061909)
$\beta_1$	0,884666 (0,010691)	0,914691 (0,009891)	0,915188 (0,009881)
$\delta$	1,773124 (0,145116)	1,252737 (0,14737)	1,254158 (0,14677)
Skew		5,537773 (0,390644)	0,984194 (0,017059)
Shape			5,552892 (0,393223)

Tabela 6.11: Estimação dos parâmetros para um modelo APARCH(1,1) - PETR4

A tabela 6.11 apresenta os parâmetros estimados para o modelo APARCH(1,1), todos são estatisticamente significantes nas três distribuições propostas: Normal, T-Student e T-Student Assimétrica.

Tabela 6.12: Critérios de informação para um modelo APARCH(1,1) - PETR4

Critérios	Normal	T-Student	T-Student Assimétrica
LogLikelihood	-13907,67431	-14120,195776	-14120,73458
AIC	-4,645505	-4,716189	-4,716035
BIC	-4,638791	-4,708356	-4,707083
SIC	-4,645507	-4,716192	-4,716039
HQIC	-4,643173	-4,713469	-4,712926
MSE	0,000094	0,000097	0,000097
MAE	0,005942	0,005969	0,005966
RMSE	0,009699	0,009828	0,009829

Por meio da tabela 6.12, podemos analisar os critérios de informação que nos auxiliam a comparar o modelo APARCH sob as três distribuições utilizadas. Por meio dos critérios AIC e BIC, o modelo APARCH(1,1) tem um melhor *fit* sob a distribuição T-Student, em linha com o que vimos no modelo GARCH(1,1).

Após analisar os modelos individualmente, podemos compará-los a fim de decidir qual o mais adequado para modelar a volatilidade condicional de PETR4. Tanto o modelo GARCH(1,1) como o APARCH(1,1) tem um *fit* melhor sob a distribuição T-Student. Comparando então os critérios de informação AIC e BIC dos dois modelos, podemos concluir que o modelo APARCH(1,1) possui menor valor em ambos os critérios, tornando-o melhor para descrever, modelar e prever a série. Esse resultado está em linha com o que foi observado na série do Ibovespa, com a diferença de que para PETR4 a distribuição mais adequada seria T-Student, enquanto que para o Ibovespa seria a T-Student Assimétrica.

### 6.3 Vale

O terceiro ativo a ser analisado é a Vale. A Vale S.A. (B3: VALE3) foi criada em 1942 pelo então presidente do Brasil Getúlio Vargas, com o objetivo de explorar minas de ferro em Itabira, MG. A empresa foi concebida inicialmente com o nome Companhia Vale do Rio Doce (CRVD) utilizado até 2007, quando passou a ser chamada de Vale S.A. Atualmente, a Vale é uma empresa líder no setor de mineração, atuando em mais de 20 países e uma receita anual de BRL 208.529 bilhões. É negociada nas bolsas brasileira (B3:

VALE3), americana (NYSE: VALE) e espanhola (LATIBEX: XVALO).<sup>6</sup> Ela figura como a maior participação no Índice Bovespa, o índice referência de performance para o mercado acionário brasileiro<sup>7</sup>. Analisaremos os retornos diários de VALE3 de 2000-01-03 até 2023-10-31. Os dados foram obtidos do Yahoo Finance, por meio do pacote tidyquant do R<sup>8</sup>.

Denotaremos por  $p_t$ , o preço de fechamento de VALE3. Para o retorno diário, com base em evidências empíricas, definimos por  $r_t = 100 * (\log(p_t) - \log(p_{t-1}))$ , sendo comum assumir que é fracamente estacionário.



Figura 6.7: Evolução da VALE3, com base no seu preço de fechamento ( $p_t$ ), de 2000-01-03 até 2023-10-31.

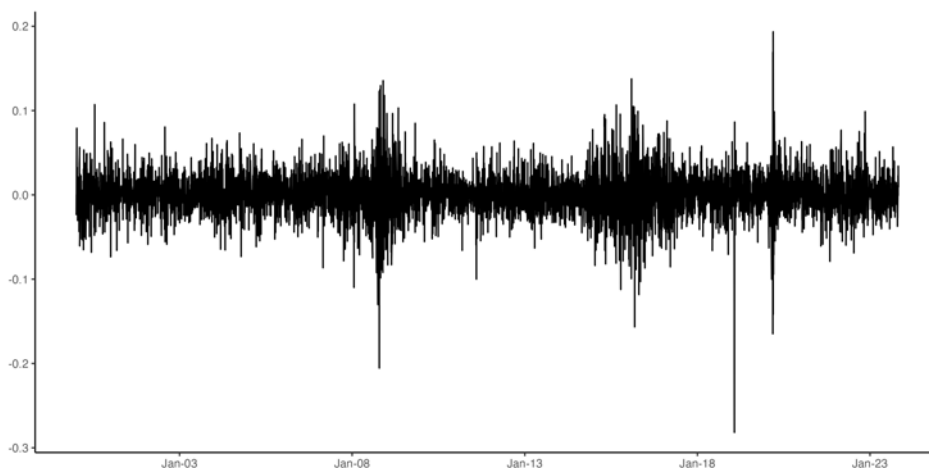


Figura 6.8: Retornos diários ( $r_t$ ) da VALE3, de 2000-01-03 até 2023-10-31.

Na figura 6.7 podemos observar um tendência de alta até Jan-08, ponto que pode ser identificado como uma possível quebra estrutural. Depois temos

<sup>6</sup><https://vale.com/pt/conheca-nossa-empresa>

<sup>7</sup>Referente a carteira de 2023-11-29

<sup>8</sup><https://cran.r-project.org/web/packages/tidyquant/index.html>

uma nova tendência de alta até Jan-23. Em volta desse último ponto mencionado, pode-se observar que a série não apresenta uma tendência clara.

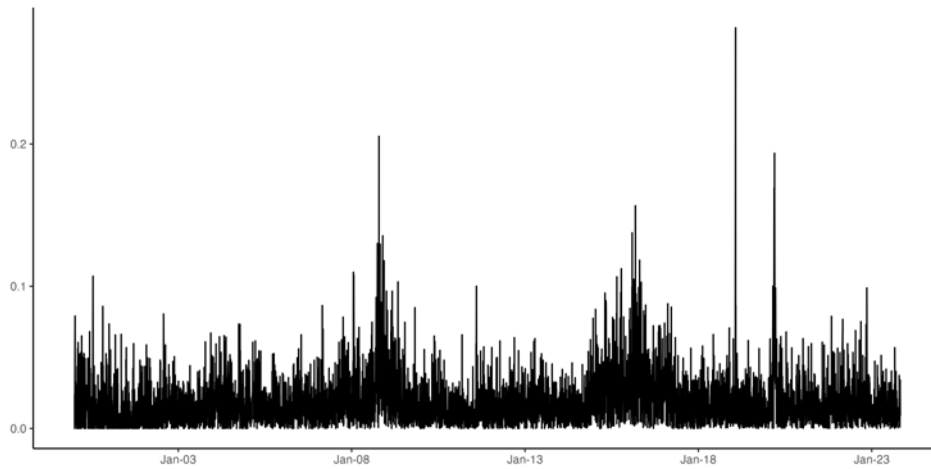


Figura 6.9: Retornos diários absolutos ( $|r_t|$ ) da VALE3, de 2000-01-03 até 2023-10-31.

As figuras 6.8 e 6.9 representam  $r_t$  e  $|r_t|$ , respectivamente. A partir da figura 6.8, podemos dizer que a série anda em torno de uma média. No entanto, existem pontos relevantes de desvio que ficam mais claros na figura 6.9. Analisando o gráfico, temos três grandes momentos de desvio: logo após Jan-08, logo antes de Jan-18 e logo após Jan-18. Em volta desses 3 pontos, percebe-se uma grande perturbação (desvio da média), maior que o observado no restante da série, corroborando com a presença de clusters de volatilidade em séries financeiras.

A tabela 6.13 nos mostra as estatísticas descritivas de  $r_t$  e  $|r_t|$  de VALE3. Analisando a tabela, podemos identificar que ambas as séries possuem uma curtose muito elevada, apesar de ser consideravelmente menor que a de PETR4. A estatística é superior ao nível da distribuição normal (curtose = 3). Isso indica a presença de caldas gordas na distribuição das séries.

Tabela 6.13: Estatísticas descritivas - VALE3

Série	Nro. Obs.	Max	Min	Média	Desvio Padrão	Skewness	Kurtosis
$r_t$	5985	0,19357	-0,28182	0,00063	0,02542	-0,17638	6,6921
$ r_t $	5985	0,28182	0	0,01801	0,01795	2,78946	17,69065

Vamos analisar o teste de autocorrelação em  $r_t$ ,  $|r_t|$  e  $r_t^2$  de VALE3. Os resultados obtidos podem ser testados ante um intervalo de confiança de 95%, calculado por  $\pm 1.96/\sqrt{T}$ , onde  $T = 5985$ . Por tanto, o intervalo de confiança de 95% é  $\pm 0.025335$ . A tabela 6.14 traz o teste de autocorrelação indo de 1 até 100 *Lags* (defasagens). Observando a primeira defasagem de  $r_t$ ,  $|r_t|$  e  $r_t^2$  e comparando com o intervalo de confiança concluímos que, apesar da estatística

de teste da série  $r_t$  ser menor do que o intervalo de confiança, tanto  $|r_t|$  como  $r_t^2$  são consideravelmente superiores. A partir disso, podemos considerar que VALE3 apresenta um processo serialmente correlacionado, justificando a utilização de modelos da família ARCH. Assim como PETR4 e o Ibovespa, o processo de VALE3 não é i.i.d.

Tabela 6.14: Teste de autocorrelação - VALE3

Lag	ACF - $r_t$	ACF - $ r_t $	ACF - $r_t^2$
1	0,014996	0,200301	0,187584
12	-0,024895	0,154634	0,130483
23	-0,00607	0,132911	0,064462
34	-0,029976	0,134886	0,07427
45	-0,007496	0,117353	0,056346
56	0,014699	0,082012	0,036597
67	0,004436	0,090781	0,039625
78	0,004642	0,080728	0,034027
89	-0,029355	0,057901	0,021418
100	0,022254	0,088531	0,028088

Utilizaremos a linguagem R e o software RStudio para estimar os modelos de volatilidade sugeridos, bem como realizar suas comparações. Os modelos a serem testados são GARCH(1,1) e APARCH(1,1), e as distribuições normal, t-student e t-student assimétrica. Posteriormente, vamos comparar o modelo que melhor se encaixa para descrever o comportamento das séries por meio dos critérios de informação AIC (*Akaike Information Criterion*) e BIC (*Bayesian Information Criterion*), principalmente.

A tabela 6.15 apresenta os parâmetros estimados do modelo GARCH(1,1), todos significantes estatisticamente, para as três distribuições propostas: Normal, T-Student e T-Student Assimétrica.

A tabela 6.16 apresenta os critérios de informação para as três distribuições utilizadas. Podemos observar que o critério de informação AIC indica que o melhor modelo seria sob a distribuição T-Student Assimétrica. No entanto, pelo critério BIC, o melhor modelo seria sob a distribuição T-Student. Tendo isso vista, utilizamos o critério Hannan-Quinn (HQIC) para definir o modelo mais adequado. Sendo assim, o modelo GARCH(1,1) com melhor *fit* para a série de VALE3 é sob a distribuição T-Student, em linha com PETR4 e diferentemente do Ibovespa.

A tabela 6.17 apresenta os parâmetros estimados para o modelo APARCH(1,1), todos são estatisticamente significantes nas três distribuições propostas: Normal, T-Student e T-Student Assimétrica, com exceção do  $\mu$ .



Tabela 6.15: Estimação dos parâmetros para um modelo GARCH(1,1) - VALE3

Parâmetros	Normal	T-Student	T-Student Assimétrica.
$\mu$	0,000802 (0,000279)	0,000694 (0,000261)	0,000849 (0,000277)
$\omega$	0,00001 (0,000002)	0,000011 (0,000002)	0,000011 (0,000002)
$\alpha_1$	0,051816 (0,005177)	0,061048 (0,007806)	0,061284 (0,007831)
$\beta_1$	0,931273 (0,00712)	0,922046 (0,010084)	0,921792 (0,010091)
Skew		6,577162 (0,551037)	1,028343 (0,017379)
Shape			6,561816 (0,548575)

Tabela 6.16: Critérios de informação para um modelo GARCH(1,1) - VALE3

Critérios	Normal	T-Student	T-Student Assimétrica
LogLikelihood	-14038,209279	-14216,814759	-14218,185769
AIC	-4,689794	-4,749144	-4,749268
BIC	-4,685318	-4,74355	-4,742555
SIC	-4,689795	-4,749146	-4,74927
HQIC	-4,68824	-4,747201	-4,746937
MSE	0,000078	0,000083	0,000083
MAE	0,0051	0,005272	0,005278
RMSE	0,008806	0,009114	0,009123

Parâmetros	Normal	T-Student	T-Student Assimétrica
$\mu$	0,000538 (0,000284)	0,000497 (0,000268)	0,000641 (0,000282)
$\omega$	0,000056 (0,00001)	0,000177 (0,000038)	0,000178 (0,000039)
$\alpha_1$	0,052154 (0,005188)	0,065205 (0,007443)	0,065319 (0,007445)
$\gamma_1$	0,22281 (0,054428)	0,276296 (0,065438)	0,271355 (0,065275)
$\beta_1$	0,939861 (0,0063)	0,932726 (0,008367)	0,932615 (0,008359)
$\delta$	1,521412 (0,156021)	1,21591 (0,149061)	1,213121 (0,149297)
Skew		6,633703 (0,559932)	1,02553 (0,017458)
Shape			6,629294 (0,558539)

Tabela 6.17: Estimação dos parâmetros para um modelo APARCH(1,1) - VALE3

Por meio da tabela 6.18, podemos analisar os critérios de informação que nos auxiliam a comparar o modelo APARCH sob as três distribuições utilizadas. Assim como no modelo GARCH(1,1), o modelo APARCH(1,1) também apresenta uma divergência entre os critérios AIC e BIC: o primeiro nos indica que o melhor modelo é sob a distribuição T-Student Assimétrica, enquanto que o segundo nos indica a distribuição T-Student. Utilizando o critério HQIC, identificamos então que o modelo APARCH(1,1) com melhor fit é sob a distribuição T-Student. Esse resultado está em linha com o que vimos em PETR4.

Tabela 6.18: Critérios de informação para um modelo APARCH(1,1) - VALE3

Critérios	Normal	T-Student	T-Student Assimétrica
LogLikelihood	-14029,425032	-14216,017234	-14217,104501
AIC	-4,68619	-4,74821	-4,748239
BIC	-4,679477	-4,740377	-4,739287
SIC	-4,686192	-4,748212	-4,748242
HQIC	-4,683859	-4,745489	-4,74513
MSE	0,000076	0,000082	0,000082
MAE	0,005211	0,005512	0,005513
RMSE	0,008727	0,009072	0,009068

Após analisar os modelos individualmente, podemos compará-los a fim de decidir qual o mais adequado para modelar a volatilidade condicional de VALE3. Tanto o modelo GARCH(1,1) como o APARCH(1,1) tem um *fit* melhor sob a distribuição T-Student. Comparando então os critérios de infomação AIC, BIC e HQIC dos dois modelos, podemos concluir que o modelo GARCH(1,1) possui menor valor nos três critérios, tornando-o melhor para descrever, modelar e prever a série. Esse resultado diverge do que foi observado na série do Ibovespa e PETR4, onde o modelo APARCH(1,1) seria mais indicado.

## 6.4

### Itaú

O quarto e último ativo a ser analisado é o Itaú. O Itau Unibanco Holding S.A. (B3: ITUB4) foi fundado em 1924 por João Moreira Salles, em Poços de Caldas, MG, grande centro financeiro e cafeicultor regional na época, como uma extensão dos negócios da família Moreira Salles ligadas a comercialização de café. Em 1940 passa a ser chamado de Banco Moreira Salles e após uma série de fusões e aquisições, em 1973, passa a ser chamada Banco Itaú S.A. e em 2008, a fusão com o Unibanco, formando o Itaú Unibanco S.A., maior banco privado do país. Atualmente, a instituição financeira segue como o

maior banco privado brasileiro, além de ser a marca mais valiosa na América Latina, avaliada em BRL 8.7 bilhões. É listada na bolsa brasileira (B3: ITUB3, ITUB4) e na bolsa americana (NYSE: ITUB).<sup>9</sup> Ela figura como a terceira maior participação no Índice Bovespa, o índice referência de performance para o mercado acionário brasileiro<sup>10</sup>. Analisaremos os retornos diários de ITUB4 de 2000-12-21 até 2023-10-31. Os dados foram obtidos do Yahoo Finance, por meio do pacote tidyquant do R<sup>11</sup>.

Denotaremos por  $p_t$ , o preço de fechamento de ITUB4. Para o retorno diário, com base em evidências empíricas, definimos por  $r_t = 100 * (\log(p_t) - \log(p_{t-1}))$ , sendo comum assumir que é fracamente estacionário.



Figura 6.10: Evolução de ITUB4, com base no seu preço de fechamento ( $p_t$ ), de 2000-12-21 até 2023-10-31.

Na figura 6.10 podemos observar uma tendência de alta com uma forte quebra estrutural em Jan-19. Após esse último ponto, pode-se observar que a série não apresenta uma tendência clara.

As figuras 6.11 e 6.12 representam  $r_t$  e  $|r_t|$ , respectivamente. A partir da figura 6.11, podemos dizer que a série anda em torno de uma média. No entanto, existem pontos relevantes de desvio que ficam mais claros na figura 6.12. Analisando o gráfico, temos dois grandes momentos de desvio: em Jan-09 e logo após Jan-19. Em volta desses 2 pontos, percebe-se uma grande perturbação (desvio da média), maior que o observado no restante da série, corroborando com a presença de clusters de volatilidade em séries financeiras.

A tabela 6.19 nos mostra as estatísticas descritivas de  $r_t$  e  $|r_t|$  de ITUB4. Analisando a tabela, podemos identificar que ambas as séries possuem uma

<sup>9</sup><https://www.itau.com.br/relacoes-com-investidores/itau-unibanco/perfil-corporativo>

<sup>10</sup>Referente a carteira de 2023-11-29

<sup>11</sup><https://cran.r-project.org/web/packages/tidyquant/index.html>

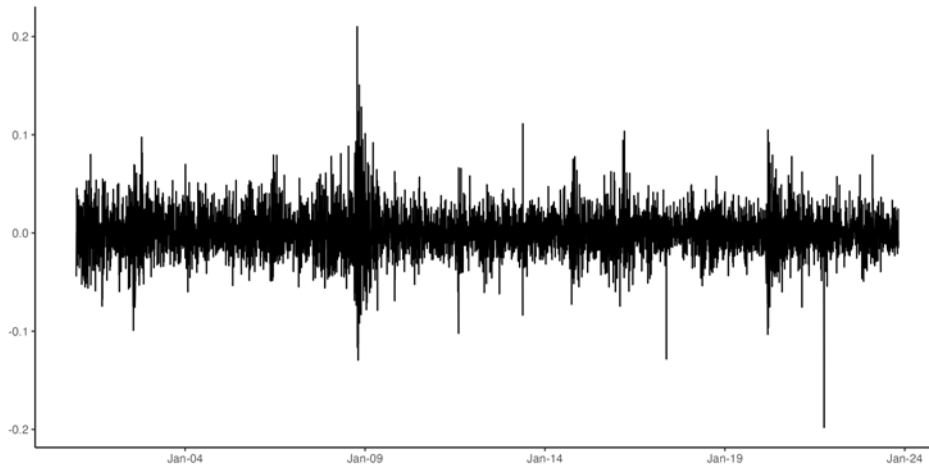


Figura 6.11: Retornos diários ( $r_t$ ) de ITUB4, de 2000-12-21 até 2023-10-31.

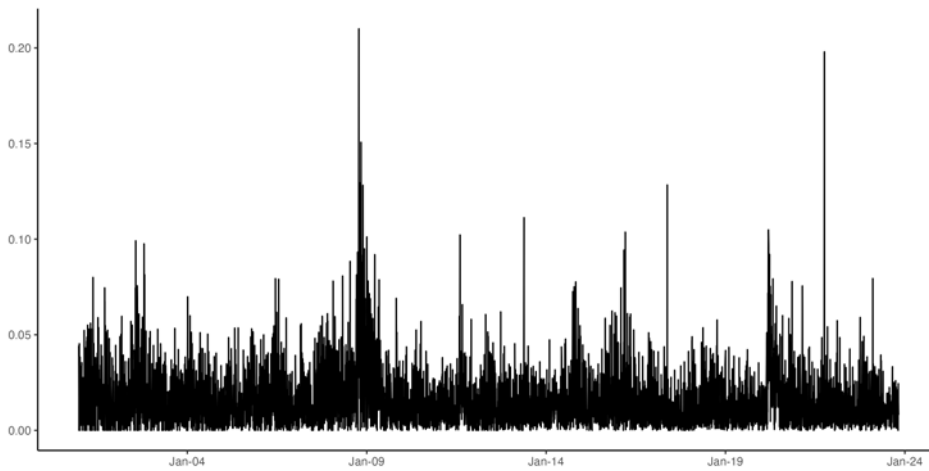


Figura 6.12: Retornos diários absolutos ( $|r_t|$ ) de ITUB4, de 2000-12-21 até 2023-10-31.

curtose elevada, apesar de ser consideravelmente menor que a de PETR4 e VALE3. A estatística é superior ao nível da distribuição normal (curtose = 3). Isso indica a presença de caldas gordas na distribuição das séries.

Tabela 6.19: Estatísticas descritivas - ITUB4

Série	Nro. Obs.	Max	Min	Média	Desvio Padrão	Skewness	Kurtosis
$r_t$	5732	0,21004	-0,19802	0,00048	0,02213	0,14681	5,37764
$ r_t $	5732	0,21004	0	0,01589	0,0154	2,59195	14,55095

Vamos analisar o teste de autocorrelação em  $r_t$ ,  $|r_t|$  e  $r_t^2$  de ITUB4. Os resultados obtidos podem ser testados ante um intervalo de confiança de 95%, calculado por  $\pm 1.96/\sqrt{T}$ , onde  $T = 5732$ . Por tanto, o intervalo de confiança de 95% é  $\pm 0.025888$ . A tabela 6.20 traz o teste de autocorrelação indo de 1 até 100 *Lags* (defasagens). Observando a primeira defasagem de  $r_t$ ,  $|r_t|$  e  $r_t^2$  e comparando com o intervalo de confiança concluímos que, apesar da estatística

de teste da série  $r_t$  ser menor do que o intervalo de confiança, tanto  $|r_t|$  como  $r_t^2$  são consideravelmente superiores. A partir disso, podemos considerar que ITUB4 apresenta um processo serialmente correlacionado, justificando a utilização de modelos da família ARCH. Assim como PETR4, Ibovespa e VALE3, o processo de ITUB4 não é i.i.d.

Tabela 6.20: Teste de autocorrelação - ITUB4

Lag	ACF - $r_t$	ACF - $ r_t $	ACF - $r_t^2$
1	0,016636	0,180801	0,174477
12	0,006816	0,153374	0,170806
23	-0,025605	0,11898	0,100788
34	-0,006627	0,081736	0,050185
45	0,003931	0,097172	0,08131
56	0,024502	0,060726	0,031039
67	-0,01189	0,058771	0,032909
78	0,002322	0,055081	0,049308
89	-0,014114	0,041947	0,027863
100	0,019629	0,02057	0,006442

Utilizaremos a linguagem R e o software RStudio para estimar os modelos de volatilidade sugeridos, bem como realizar suas comparações. Os modelos a serem testados são GARCH(1,1) e APARCH(1,1), e as distribuições normal, t-student e t-student assimétrica. Posteriormente, vamos comparar o modelo que melhor se encaixa para descrever o comportamento das séries por meio dos critérios de informação AIC (*Akaike Information Criterion*) e BIC (*Bayesian Information Criterion*), principalmente.

A tabela 6.21 apresenta os parâmetros estimados do modelo GARCH(1,1), todos significantes estatisticamente, para as três distribuições propostas: Normal, T-Student e T-Student Assimétrica.

Tabela 6.21: Estimação dos parâmetros para um modelo GARCH(1,1) - ITUB4

Parâmetros	Normal	T-Student	T-Student Assimétrica.
$\mu$	0,000859 (0,000249)	0,000595 (0,00024)	0,000802 (0,000249)
$\omega$	0,000011 (0,000002)	0,00001 (0,000002)	0,00001 (0,000002)
$\alpha_1$	0,065031 (0,00618)	0,061612 (0,007167)	0,062124 (0,007145)
$\beta_1$	0,910929 (0,008435)	0,915723 (0,009737)	0,915406 (0,009624)
Skew		7,875595 (0,751526)	1,055752 (0,019008)
Shape			7,892513 (0,748602)

A tabela 6.22 apresenta os critérios de informação para as três distribuições utilizadas. Podemos observar que, tanto o critério AIC como BIC confirmam que o modelo GARCH(1,1) tem melhor fit sob a distribuição T-Student Assimétrica. Esse resultado está em linha com o que foi observado no caso do Ibovespa.

Tabela 6.22: Critérios de informação para um modelo GARCH(1,1) - ITUB4

Critérios	Normal	T-Student	T-Student Assimétrica
LogLikelihood	-14214,919792	-14333,698278	-14338,319898
AIC	-4,958451	-4,999546	-5,000809
BIC	-4,953807	-4,993742	-4,993845
SIC	-4,958452	-4,999547	-5,000812
HQIC	-4,956835	-4,997526	-4,998385
MSE	0,000072	0,000073	0,000073
MAE	0,005483	0,005542	0,005552
RMSE	0,008502	0,008531	0,008554

A tabela 6.23 apresenta os parâmetros estimados para o modelo APARCH(1,1), todos são estatisticamente significantes nas três distribuições propostas: Normal, T-Student e T-Student Assimétrica, com exceção do  $\mu$ .

Parâmetros	Normal	T-Student	T-Student Assimétrica
$\mu$	0,000407 (0,000255)	0,000301 (0,000243)	0,000472 (0,000252)
$\omega$	0,000087 (0,000014)	0,000111 (0,000021)	0,000105 (0,00002)
$\alpha_1$	0,061379 (0,00651)	0,062117 (0,007423)	0,062579 (0,007367)
$\gamma_1$	0,434635 (0,071576)	0,431455 (0,086212)	0,412174 (0,084197)
$\beta_1$	0,923876 (0,007612)	0,925944 (0,009074)	0,925547 (0,008992)
$\delta$	1,44617 (0,147159)	1,367424 (0,168354)	1,378235 (0,170834)
Skew		8,295989 (0,828709)	1,045583 (0,018945)
Shape			8,341885 (0,831008)

Tabela 6.23: Estimação dos parâmetros para um modelo APARCH(1,1) - ITUB4

Por meio da tabela 6.24, podemos analisar os critérios de informação que nos auxiliam a comparar o modelo APARCH sob as três distribuições utilizadas. O modelo APARCH(1,1) apresenta uma divergência nos critérios de informação: AIC nos indica que o melhor modelo é sob a distribuição T-Student

Assimétrica, enquanto que o BIC nos indica a T-Student. Para selecionarmos então o modelo mais adequado, analisamos o critério HQIC que nos indica que o melhor modelo é o APARCH(1,1) sob a distribuição T-Student Assimétrica, em linha com o que vimos no Ibovespa.

Tabela 6.24: Critérios de informação para um modelo APARCH(1,1) - ITUB4

Critérios	Normal	T-Student	T-Student Assimétrica
LogLikelihood	-14218,679603	-14343,373353	-14346,723019
AIC	-4,959065	-5,002224	-5,003044
BIC	-4,9521	-4,994098	-4,993757
SIC	-4,959067	-5,002227	-5,003048
HQIC	-4,95664	-4,999395	-4,999811
MSE	0,000069	0,00007	0,00007
MAE	0,00534	0,00539	0,005404
RMSE	0,008329	0,008372	0,00839

Após analisar os modelos individualmente, podemos compará-los a fim de decidir qual o mais adequado para modelar a volatilidade condicional de ITUB4. Tanto o modelo GARCH(1,1) como o APARCH(1,1) tem um *fit* melhor sob a distribuição T-Student Assimétrica. Comparando então os critérios de informação AIC, BIC e HQIC dos dois modelos, podemos concluir que o modelo APARCH(1,1) possui menor valor nos critérios AIC e HQIC, tornando-o melhor para descrever, modelar e prever a série. Esse resultado está em linha com o que foi observado para PETR4 e, principalmente, o Ibovespa, por compartilharem a mesma distribuição (T-Student Assimétrica).

## 7

### Conclusão

O presente trabalho teve como finalidade realizar um estudo empírico, comparando modelos de volatilidade condicional da família Autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH). Em específico, analisamos o modelo Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity (GARCH) e Asymmetric Power Autoregressive conditional heteroskedasticity (APARCH). Para tanto, buscamos entender a importância da volatilidade no mercado financeiro e, principalmente, no mercado de opções. Estimar a volatilidade corretamente, permite um apuração mais preciso dos contratos de opção, sendo fundamental para participantes do mercado como Market Makers, responsáveis por dar liquidez aos mercados.

Analisamos os cinco principais fatos estilizados associados a volatilidade. São eles: Caudas gordas e Curtose excessiva, Clustering de volatilidade, Memória longa, Efeitos de alavancagem e Efeito de Spillover.

Em nossos testes empíricos pudemos observar que todas as quatro séries analisadas apresentavam curtose excessiva e caudas gordas, ficando evidente nos testes de Curtose que, em todos os casos, retornou valores muito superiores que 3, valor de teste para distribuição normal. Além disso, ainda nas tabelas de estatística descritiva, pode-se observar que o valor para o *Skewness* (Assimetria) é diferente de zero para todos os casos, indicando que nenhum dos ativos possui retornos com distribuição simétrica. [Bollerslev, 1987] propõe a utilização da distribuição T-Student, buscando capturar as assimetrias e caudas gordas presentes nas distribuições dos retornos dos ativos.

Em linha com [Mandelbrot, 1963], pode-se observar o fenômeno de clustering de volatilidade (ou agrupamento de volatilidade) nos gráficos de retorno dos ativos, onde é evidente que períodos de maior (menor) volatilidade se agrupam próximos a outros de mesma magnitude.

Por meio da função de autocorrelação - teste ACF - verificamos que as séries financeiras são serialmente correlacionadas e não podem ser consideradas um processo i.i.d. - independentes e identicamente distribuídas. Esses resultados vão em linha com [Taylor, 1986], [Ding et al., 1993] e [Crato and Lima, 1994], principalmente quando analisamos  $|r_t|$  (retorno abo-



luto) e  $r_t^2$  (retorno quadrático).

Num segundo momento, revisamos os modelos de volatilidade da família ARCH (Autoregressive conditional heteroskedasticity), suas generalizações (GARCH) e derivações (APARCH, por exemplo).

Por fim, comparamos os modelos GARCH(1,1) e APARCH(1,1), sob três distribuições: Normal, T-Student e T-Student Assimétrica. O experimento foi conduzido em linguagem R, no software R Studio. Testamos para quatro ativos financeiros: Ibovespa, PETR4, VALE3 e ITUB4.

Os resultados obtidos foram: Para o Ibovespa, o melhor modelo é APARCH(1,1) sob a distribuição T-Student Assimétrica; Para PETR4, o melhor modelo é APARCH(1,1) sob a distribuição T-Student; Para VALE3, o melhor modelo é GARCH(1,1) sob a distribuição T-Student; Para ITUB4, o melhor modelo é APARCH(1,1), sob a distribuição T-Student Assimétrica.

Podemos concluir que o modelo APARCH(1,1) é superior em quase todos os casos, com exceção de VALE3, onde o modelo GARCH(1,1), segundo os critérios de informação, foi ligeiramente superior. Não é possível concluir qual distribuição melhor se adequa a modelagem: T-Student ou T-Student Assimétrica. Em linha com os resultados obtidos em [Ding, 2011], conseguimos demonstrar que o modelo APARCH é, em sua maioria, mais adequado para modelar séries financeiras por ser capaz de melhor capturar os fatos estilizados associados a volatilidade. No entanto, não foi possível chegar a um consenso quanto a distribuição mais adequada.

## Referências Bibliográficas

- [Bae and Karolyi, 1994] BAE, K.-H.; ANDREW KAROLYI, G.. **Good news, bad news and international spillovers of stock return volatility between japan and the u.s.** Pacific-Basin Finance Journal ; volume 2, issue 4, page 405-438 ; ISSN 0927-538X, 1994.
- [Black e Scholes, 1973] BLACK, F.; SCHOLES, M.. **The pricing of options and corporate liabilities.** Journal of Political Economy, 81(3):637 – 654, 1973.
- [Black, 1976] BLACK, F.. **Studies of stock price volatility changes.** In: PROCEEDINGS OF THE 1976 MEETING OF THE BUSINESS AND ECONOMIC STATISTICS SECTION, p. 177–181, Washington, DC, 1976. American Statistical Association.
- [Bollerslev, 1986] BOLLERSLEV, T.. **Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity.** Journal of Econometrics, 31:307, 1986.
- [Bollerslev, 1987] BOLLERSLEV, T.. **A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return.** Rev. Econ. Stat., 69(3):542, Aug. 1987.
- [Bollerslev and Mikkelsen, 1996] BOLLERSLEV, T.; OLE MIKKELSEN, H.. **Modeling and pricing long memory in stock market volatility.** Journal of Econometrics, 73(1):151 – 184, 1996.
- [Bollerslev et al., 2006] BOLLERSLEV, T.. **Leverage and volatility feedback effects in high-frequency data.** Journal of Financial Econometrics ; volume 4, issue 3, page 353-384 ; ISSN 1479-8409 1479-8417, 2006.
- [Christie, 1982] CHRISTIE, A.. **The stochastic behavior of common stock variances value, leverage and interest rate effects.** Journal of Financial Economics ; volume 10, issue 4, page 407-432 ; ISSN 0304-405X, 1982.
- [Cont, 2001] CONT, R.. **Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues.** QUANTITATIVE FINANCE, 1(2):223 – 236, 2001.

- [Crato and Lima, 1994] CRATO, N.; DE LIMA, P. J.. **Long-memory and nonlinearity: a time series analysis of stock returns and volatilities.** *Managerial Finance*, 20(2-3):49, 1994.
- [Ding et al., 1993] DING, Z.; GRANGER, C. W. J. ; ENGLE, R. F.. **A long memory property of stock market returns and a new model.** *Journal of Empirical Finance*, 1(1):83–106, June 1993.
- [Ding, 2011] DING, D.. **Modeling of market volatility with aparch model.** 2011.
- [Engle, 1982] ENGLE, R. F.. **Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation.** *Econometrica*, 50(4):987 – 1007, 1982.
- [Engle and Lee, 1999] ENGLE, R. F.; LEE, G. G.. **A permanent and transitory component model of stock return volatility.** p. 475–497, 1999.
- [Fama, 1970] FAMA, E. F.. **Efficient capital markets: A review of theory and empirical work.** *The Journal of Finance*, 25(2):383 – 417, 1970.
- [Glosten et al., 1993] GLOSTEN, L. R.; JAGANNATHAN, R. ; RUNKLE, D. E.. **On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks.** *The Journal of Finance*, 48(5):1779 – 1801, 1993.
- [Hull, 2002] HULL, J.. **Options, futures, other derivatives.** Prentice-Hall, 2002.
- [Li and Giles, 2015] LI, Y.; GILES, D. E.. **Modelling volatility spillover effects between developed stock markets and asian emerging stock markets.** *International Journal of Finance Economics*, 20(2):155, 2015.
- [Mandelbrot, 1963] MANDELBROT, B.. **The variation of certain speculative prices.** *The Journal of Business*, 36(4):394 – 419, 1963.
- [Markowitz, 1952] MARKOWITZ, H.. **Portfolio selection.** *The Journal of Finance* ; volume 7, issue 1, page 77 ; ISSN 0022-1082, 1952.
- [Merton, 1973] MERTON, R. C.. **Theory of rational option pricing.** *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1):141 – 183, 1973.
- [Naimy et al., 2021] NAIMY, V.; HADDAD, O.; FERNÁNDEZ-AVILÉS, G. ; EL KHOURY, R.. **The predictive capacity of garch-type models**

- in measuring the volatility of crypto and world currencies.** PloS one, 16(1):e0245904, 2021.
- [Nelson, 1991] NELSON, D. B.. **Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach.** Econometrica, 59(2):347 – 370, 1991.
- [Saporito, 2023] SAPORITO, Y. F.. **Modelos de volatilidade para derivativos.** FGV editora, 2023.
- [Sharpe, 1964] SHARPE, W. F.. **Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk.** The Journal of Finance, 19(3):425 – 442, 1964.
- [Taylor, 1986] TAYLOR, S. S. J.. **Modelling financial time series.** World Scientific, 2008.