

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

# **Previsão da inflação brasileira com intercepto variante no tempo**

Victor Hugo Kenji Silva Fujii

No. de matrícula: 2011028

Orientador: Gilberto Boaretto

Rio de Janeiro, Brasil

Dezembro de 2023



Victor Hugo Kenji Silva Fujii

# Previsão da inflação brasileira com intercepto variante no tempo

Monografia de Final de Curso

Orientador: Gilberto Boaretto

Declaro que o presente trabalho é de minha autoria e que não recorri para realizá-lo, a nenhuma forma de ajuda externa, exceto quando autorizado pelo professor orientador.

Rio de Janeiro, Brasil

Dezembro de 2023

As opiniões expressas nesse trabalho são de responsabilidade única e exclusiva do autor.

# Resumo

O presente trabalho busca avaliar se há maior acurácia preditiva para prever a inflação mensal e a inflação acumulada em 12 meses ao tornar o intercepto de uma curva de Phillips híbrida variante no tempo via filtro de Kalman quando comparado ao caso do intercepto fixo no tempo, sendo estimado por MQO. A motivação por trás da metodologia proposta é a baixa variabilidade e existência de quebras estruturais no intercepto quando estimado por MQO na curva de Phillips híbrida, o que impacta negativamente a previsão. Os dois modelos principais são os dois citados anteriormente e são utilizados mais dois modelos, o  $ARIMA(p, d, q)$  e previsão via média histórica, em que ambos são modelos benchmarks. O principal resultado encontrado foi que há ganhos na utilização da metodologia proposta quando se faz a previsão para horizontes temporais mais longos, em que há um menor conjunto informacional por parte dos regressores, tornando o intercepto mais relevante para a previsão.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Dados e estatísticas descritivas</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>12</b>
3.1	Modelos . . . . .	12
3.1.1	Curva de Philipps Híbrida . . . . .	12
3.1.2	Curva de Philipps híbrida em espaços de estado . . . . .	13
3.1.3	ARIMA . . . . .	13
3.1.4	Média histórica . . . . .	14
3.2	Filtro de Kalman . . . . .	14
3.2.1	Equação de medida . . . . .	14
3.2.2	Equação de estado . . . . .	15
3.2.3	Equações de recursividade . . . . .	15
3.2.4	Equações de predição . . . . .	15
3.2.5	Equações de atualização . . . . .	16
3.2.6	Equações de suavização . . . . .	17
3.3	Inicialização e escolha de parâmetros fixos . . . . .	17
3.4	Estimação dos parâmetros . . . . .	17
3.4.1	A função de verossimilhança . . . . .	18
3.4.2	O algoritmo EM . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Métricas de erro</b>	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>20</b>
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>24</b>



# 1 Introdução

Realizar previsões acuradas para a inflação é uma atividade bastante desafiadora mas de grande importância dada sua relevância em diversas atividades econômicas. Dentre essas, está o auxílio na tomada de decisão no âmbito macroeconômico por parte dos bancos centrais, que utilizam as expectativas de inflação como um dos métodos para realizar política monetária e ancorar expectativas. Com um banco central sendo eficiente nesse âmbito, os efeitos na economia do país são positivos, já que a política monetária estará sendo eficiente. Ademais, a inflação adiciona incerteza a cenários futuros, o que encurta os prazos de investimento. Assim, ter previsões acuradas para a inflação é de grande utilidade para guiar atividades de investimento por diminuir a incerteza associada ao futuro, a qual é mais alta em países emergentes como o Brasil.

Nesse contexto, há artigos que buscam métodos que geram previsões mais acuradas para a inflação brasileira. Os de maior destaque são os que utilizam métodos de machine learning para lidar com a alta dimensionalidade dos dados macroeconômicos. Em Garcia et al (2017) e Medeiros et al (2016), é visto que os modelos da classe LASSO geram as melhores previsões para o curto prazo. Para o caso da inflação acumulada é visto no primeiro artigo que o modelo que gera as melhores previsões é o complete subset regression. Já em (Araujo; Gaglianone, 2023) é visto que os métodos de machine learning superam os métodos tradicionais de econometria por levar em consideração a não linearidade inerente na dinâmica da série inflacionária, especialmente os modelos de redes neurais e random forest. Apesar dos resultados promissores com os métodos de machine learning, não iremos lidar com esses modelos no presente trabalho.

Foi observado em (Boaretto; Silva, 2018) que ao estimar uma curva de Phillips híbrida para série de inflação brasileira o intercepto do modelo apresenta quebras estruturais e instabilidades devido a variabilidades que não são capturadas pelos regressores. Visto isso, buscamos analisar se a utilização do intercepto variante no tempo como um passeio aleatório numa curva de Phillips híbrida, utilizando o filtro de Kalman, gera previsões mais acuradas quando comparado ao caso do intercepto fixo no tempo para a previsão em tempo real ( $h = 0$ ) e um passo à frente ( $h = 1$ ) para a inflação mensal e para a previsão da inflação acumulada 12 meses à frente ( $h = 12$ ). Por conta de instabilidades nos parâmetros dos modelos estimados, (Stock; Watson, 2007) empregaram uma abordagem semelhante, utilizando o modelo de componentes não observados e volatilidade estocástica (UC-SV) para descrever a inflação trimestral dos Estados Unidos. Nesse modelo, a dinâmica inflacionária é descrita por um intercepto variante no tempo como um passeio aleatório, e também incorpora uma estrutura para capturar a volatilidade da série. O principal resultado encontrado é que o processo gerador da inflação consegue ser bem descrito por dois modelos parcimoniosos: O UC-SV e um ARIMA(0,1,1), em que o segundo é equivalente a um modelo cuja única estrutura é o intercepto variando no tempo como um passeio aleatório.

Para a previsão da inflação mensal, o período de análise vai de janeiro de 2004 até janeiro de 2023 e para a previsão da inflação acumulada o período de análise vai de abril de 2004 até janeiro de 2023. Além disso, simulamos um cenário em que as previsões são

realizadas sempre no último dia útil de cada mês em todos os horizontes. As variáveis macroeconômicas utilizadas como covariadas são a expectativa de inflação, o índice de atividade econômica do banco central (IBC-Br) e taxa de variação do câmbio real. Para realizar o treinamento dos modelos e gerar as previsões, utilizamos o método de janela estendida. O período fora da amostra para analisar a acurácia das previsões se inicia em janeiro de 2014 e se estende até o final do período de análise.

As previsões são comparadas por meio de três métricas de erro: Raiz quadrada do erro quadrático médio (RMSE), média do erro absoluto (MAE) e  $R^2$  fora da amostra ( $R^2 OOS$ ). Cada uma das métricas são calculadas usando três amostras diferentes para analisarmos como os modelos performam em diferentes contextos inflacionários. A primeira utiliza todas as observações fora da amostra, a segunda utiliza somente para observações que estão acima da média da inflação fora da amostra e a terceira utiliza observações que estão abaixo da média da inflação fora da amostra. Os modelos que são utilizados como benchmark são o método de média histórica e o  $ARIMA(p, d, q)$ , em que os parâmetros  $p, d, q$  são escolhidos a cada janela.

Mostramos que a utilização do modelo com intercepto variante no tempo como um passeio aleatório gera uma acurácia preditiva maior que o modelo com intercepto fixo no tempo para a previsão um passo à frente ( $h = 1$ ) e para a previsão 12 meses à frente ( $h = 12$ ) da inflação acumulada em 12 meses. No primeiro caso, ambos os modelos superam os benchmarks e vemos que o modelo proposto performa relativamente melhor em cenários em que a inflação está em alta. No segundo caso, somente o modelo com intercepto variante no tempo supera ambos os benchmarks e, além disso, o modelo performa melhor quando a inflação acumulada está em baixa. Observamos que, para  $h = 1$ , o intercepto variante no tempo consegue capturar substancialmente melhor a dinâmica inflacionária do que o intercepto fixo no tempo, sendo esse o principal fator para a melhor performance do modelo em análise. Para  $h = 12$ , o modelo proposto gera um intercepto mais suavizado em comparação com a curva de Phillips tradicional, levando a um intercepto menos instável e menos suscetível a quebras estruturais. Os dois modelos superam os benchmarks e são bastante equivalentes para o caso da previsão em tempo real ( $h = 0$ ), com o modelo de intercepto fixo no tempo sendo ligeiramente superior. Nesse caso não há ganho ao utilizar a abordagem proposta devido ao robusto conjunto de informação advindo dos regressores num cenário de previsão em tempo real, havendo pouca variabilidade a ser capturada pelo intercepto.

## 2 Dados e estatísticas descritivas

As variáveis utilizadas nesta monografia, as quais compõem uma curva de Philips híbrida, serão as seguintes: Taxa de inflação mensal a partir do índice de preço ao consumidor (IPCA) e taxa de inflação acumulada em 12 meses, expectativa de inflação, variação percentual do índice de atividade econômica do Banco Central (IBC-Br) e taxa de câmbio real efetiva (REER). Os dados cobrem o período de janeiro de 2004 a janeiro de 2023. A coluna “Transformação” na tabela indica a transformação utilizada sobre a variável original para torná-la propícia a questão macroeconômica proposta.

Tabela 1: Variáveis utilizadas

Notação	Variável	Fonte	Transformação
$\pi_t$	IPCA	IBGE	Variação percentual
$\pi_t^{12}$	Variação percentual do IPCA	IBGE	Acumulação em 12 meses
$E_t\pi_{t+h}$	Expectativa de inflação: $h$ períodos à frente	BCB	-
$y_t$	IBC-Br	BCB	Variação percentual
$\Delta e_t$	Taxa de câmbio real efetiva	BIS	Variação percentual

**Taxa de inflação mensal mensurada a partir do IPCA ( $\pi_t$ ).** Será uma das variáveis a serem previstas. A inflação é mensurada a partir da variação mensal desse índice no Brasil, o qual mensura a variação de preço de um conjunto de produtos e serviços comercializados no varejo, os quais são consumidos pelas famílias brasileiras que estão inseridas na faixa de renda de 1 a 40 salários mínimos em áreas urbanas das regiões metropolitanas de diversos estados do país.

**Taxa de inflação mensal acumulada em 12 meses ( $\pi_t^{12}$ ).** Será a outra variável a ser prevista. É o produto das últimas 12 taxas de inflação mensais observadas.

**Expectativa de inflação ( $E_t\pi_{t+h}$ ).** É obtida por meio do Boletim Focus, divulgado pelo Banco Central do Brasil. O boletim é divulgado semanalmente e nele são divulgadas diversas estatísticas descritivas projeções feitas pelo mercado para diversas variáveis relevantes da economia brasileira, como o PIB e meta da taxa de juros Selic. Dentre essas estatísticas, a que será utilizada para essa variável será a mediana.

**IBC-Br ( $y_t$ ).** Mensura a evolução da atividade econômica do país sob a ótica da oferta, incorporando variáveis *proxies* para o desempenho de setores relevantes da economia. Dessa forma, o índice oferece suporte ao banco central na estratégia de política monetária. É de grande utilidade por ser divulgado mensalmente, sendo de mais rápida divulgação do que o PIB, o qual é mensurado pelo IBGE e divulgado trimestralmente.

**Taxa de câmbio real efetiva ( $\Delta e_t$ ).** É um indicador que combina taxas de câmbio bilaterais, ajustando para as inflações dos países envolvidos e ponderando pela participação de cada país na pauta importadora e exportadora. Assim, o indicador faz o ajuste dos valores monetários para refletir a variação na taxa de inflação, além de dar peso maior para países que possuem maior interação comercial.

A seguir, seguem algumas estatísticas importantes das variáveis utilizadas no exercício preditivo.

Tabela 2: Estatísticas Descritivas - Janeiro de 2004 a Janeiro de 2023

Variável	Média	Mediana	Mínimo	Máximo	Desvio Padrão
$\pi_t$	0.47%	0.45%	-0.68%	1.62%	0.33 p.p
$\pi_t^{12}$	6.04%	5.69%	1.88%	17.24%	2.75 p.p
$E_t\pi_{t+1}$	0.46%	0.45%	-0.65%	1.40%	0.29 p.p
$y_t$	0.20%	-0.25%	-13.01%	12.59%	3.75 p.p
$\Delta e_t$	-0.004%	-0.11%	-14.28%	9.81%	3.20 p.p

Notamos que as variáveis apresentam variabilidade considerável. Se analisarmos períodos mais específicos, especialmente de crise econômica, a volatilidade é ainda mais acentuada. A partir da Figura 1, podemos visualizar isso ocorrendo para as duas variáveis alvo.

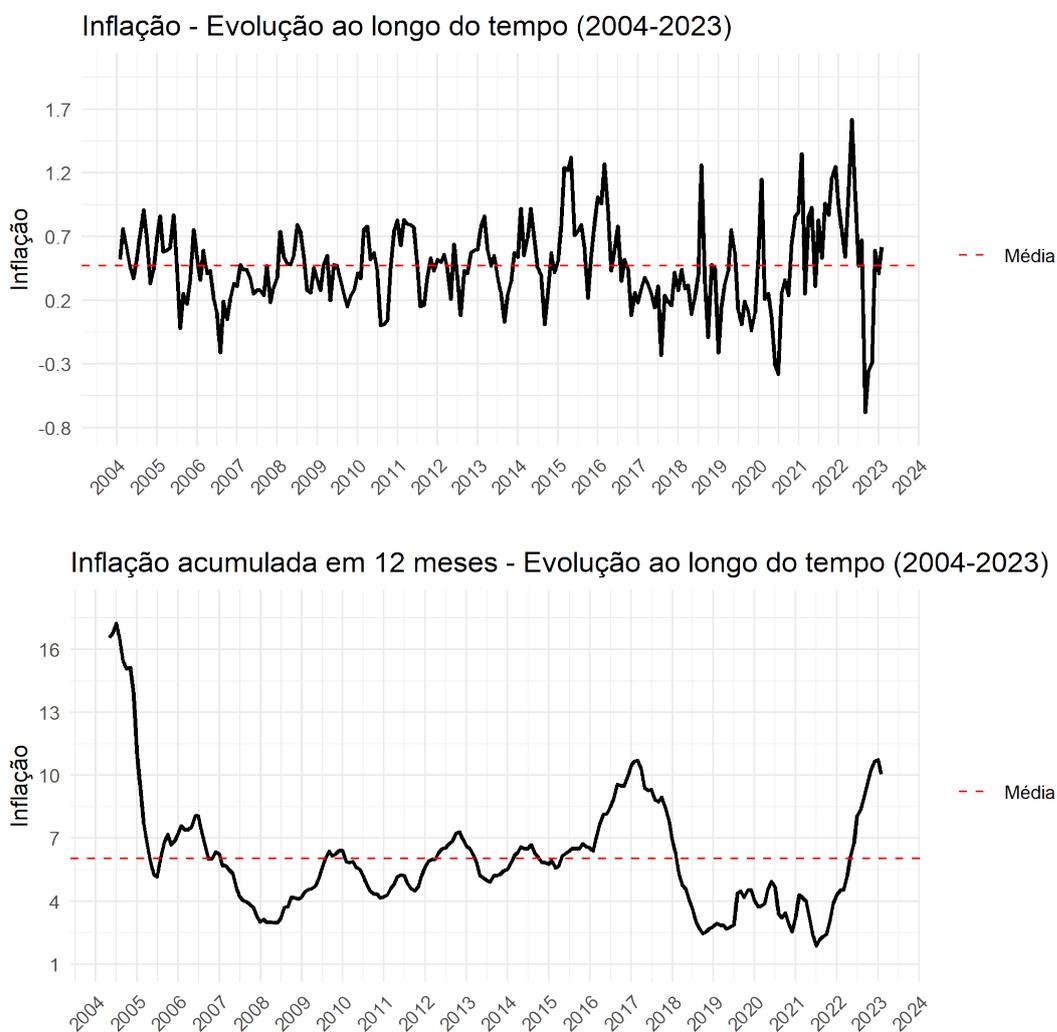


Figura 1: Evolução da inflação brasileira mensal e acumulada em 12 meses

Por exemplo, ao capturar momentos de crise econômica no país, como em 2015-2016 e o período da pandemia da COVID-19, é possível observar um aumento significativo na volatilidade e uma alteração no nível das séries.

Tais instabilidades na série podem decorrer de quebras estruturais, o que pode comprometer o procedimento de previsão de inflação empregando um modelo com parâmetros fixos. Como visto em (Boaretto; Silva, 2018), ao se estimar uma curva de Philips híbrida por meio de um modelo em espaço de estados com parâmetros variando no tempo, um dos parâmetros que apresentou essa instabilidade foi o intercepto, devido a uma variação não explicada pelos regressores. Dessa forma, para contornar essa situação, a utilização de parâmetros variantes no tempo pode ser bastante interessante por não engessar o valor dos coeficientes a um único valor para todo o exercício preditivo, tornando-o dinâmico e ajustável a períodos de maior instabilidade, podendo levar a previsões mais acuradas.

## 3 Metodologia

Nós geramos 109 previsões fora da amostra empregando-se janelas estendidas. A estimação inicial utiliza os dados compreendidos entre janeiro de 2004 a dezembro de 2012 e a última janela de estimação possui dados compreendidos de janeiro de 2004 a janeiro de 2023.

### 3.1 Modelos

Nós geramos as previsões com uma regressão linear com variáveis preditoras seguindo uma curva de Philipps híbrida, a mesma curva de Philipps com intercepto variante no tempo, ARIMA e média histórica.

#### 3.1.1 Curva de Philipps Híbrida

A especificação do modelo base desse trabalho é a seguinte:

$$\begin{aligned} \pi_t &= \mu + \beta \mathbf{X}_{t-h} + \sum_{k=1}^{11} \delta_k d_{k,t} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \\ \mathbf{X}_{t-h} &= \begin{bmatrix} y_{t-h} \\ E_{t-h}\pi_t \\ \Delta e_{t-h} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

A matriz  $\mathbf{X}_{t-h}$  comporta as variáveis preditoras existentes numa Curva de Philipps híbrida, em que  $h$  é o horizonte de previsão. O termo  $d_t$  são dummies mensais de modo a capturar qualquer estrutura sazonal não captada pelos preditores e  $\varepsilon_t$  é o termo de erro de previsão. A estimação dos coeficientes ocorre via Mínimos Quadrados Ordinários (MQO). As matrizes de coeficientes  $\beta$  e  $\delta$  são reestimadas a cada janela, assim como o intercepto  $\mu_t$ .

### 3.1.2 Curva de Philipps híbrida em espaços de estado

O principal modelo desse trabalho possui a seguinte especificação geral:

$$\begin{aligned}\pi_t &= \mu_t + \beta X_{t-h} + \delta d_t + w_t \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + v_t \\ X_{t-h} &= \begin{bmatrix} y_{t-h} \\ E_{t-h}\pi_t \\ \Delta e_{t-h} \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} w_t \\ v_t \end{pmatrix} &\sim N(0, \Sigma) \\ \Sigma &= \begin{pmatrix} \sigma_w^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2}$$

A diferença dessa especificação para o primeiro modelo é a inclusão da modelagem para o intercepto como um passeio aleatório, o tornando variante no tempo. A primeira equação do sistema é denominada **equação de medida** e a segunda é a **equação de estado**. Para realizar a estimação por máxima verossimilhança deste modelo empregamos o Filtro de Kalman, que é descrito na subseção 3.2.

### 3.1.3 ARIMA

A especificação geral do modelo ARIMA é a seguinte:

$$\pi_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i \pi_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-i} + u_t\tag{3}$$

O modelo será reestimado a cada janela, ou seja, não necessariamente a especificação do modelo será a mesma para todas as janelas pois as ordens são escolhidas de acordo com o BIC. O ARIMA será tratado como um dos benchmarks para as previsões que serão realizadas pelos modelos principais.

### 3.1.4 Média histórica

A previsão empregando média histórica é simples por somente estimar a média e é o segundo benchmark utilizado para as previsões dos modelos principais. A previsão  $h$  passos a frente na janela  $j$  de previsão é gerada da seguinte forma, sendo  $n$  o número de observações presentes na janela corrente:

$$\hat{\pi}_{t+h} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_j} \pi_{i,j}, \quad j = 1, \dots, 109 \quad (4)$$

## 3.2 Filtro de Kalman

Sob a especificação na forma de espaços de estado da curva de Philipps, é possível aplicarmos a estimação por máxima verossimilhança empregando o filtro de Kalman de modo a obtermos o intercepto variante no tempo. A estimação é feita a partir de uma variável observada ( $\pi$ ) para que se possa obter uma estimativa para uma variável não observável, a variável de estado ( $\mu$ ). A seguir serão apresentadas as principais equações que estão presentes no funcionamento do filtro.

### 3.2.1 Equação de medida

A especificação geral da equação de medida pode ser vista na subseção 3.1.2 como sendo a primeira equação do sistema apresentado. Abaixo, é mostrada novamente a equação de medida com as descrições dos termos que a compõem:

$$\pi_t = \mu_t + \beta X_{t-h} + \delta d_t + w_t, \quad w_t \sim N(0, Q) \quad (5)$$

$\pi_t$ : É o vetor que armazena a variável dependente. Possui dimensão  $1 \times T$ , em que  $T$  é o número de horizontes temporais.

$\mu_t$ : É o vetor que armazena a variável de estado. Também possui dimensão  $1 \times T$ .

$\beta$ : É o vetor que armazena os coeficientes associados as covariadas. Possui dimensão  $1 \times 3$ , sendo o número de colunas associado ao número de preditores do modelo. Os coeficientes são estimados a cada janela.

$X_{t-h}$ : É o vetor que armazena as covariadas. Possui dimensão  $3 \times T$ .

$\delta$ : É o vetor que armazena os coeficientes associados as dummies mensais e também é estimada a cada janela. Possui dimensão  $1 \times 11$ .

$d_t$ : É a matriz que armazena as dummies mensais. Possui dimensão  $11 \times T$ .

$Q$ : É um escalar, que determina a variância do termo de erro idiossincrático. Possui valor fixo para todas as janelas. Na subseção 3.3 é explicado como é feito o cômputo desse valor.

### 3.2.2 Equação de estado

A equação de estado do sistema pode ser vista abaixo, assim como a descrição das matrizes que a compõem:

$$\mu_t = \mu_{t-1} + v_t, v_t \sim N(0, R) \quad (6)$$

$\mu_t$ : É o vetor que armazena a variável de estado. Possui dimensão  $1 \times T$ .

$\mu_{t-1}$ : É o vetor que armazena a primeira defasagem da variável de estado, ou seja, possui os valores para essa variável imediatamente antes do período de atualização. Também possui dimensão  $1 \times T$ .

$R$ : É um escalar, que determina a variância do termo idiossincrático da equação. Possui valor fixo para todas as janelas. Na subseção 3.3 é explicado como é feito o cômputo desse valor.

### 3.2.3 Equações de recursividade

As equações que compõem o filtro de Kalman se dividem em três grupos: As equações de **predição**, **atualização** e **suavização**. Essas serão descritas nas próximas três subseções.

### 3.2.4 Equações de predição

Seja  $X$  uma variável aleatória qualquer. Denotaremos  $x_{t|t-h}$  como a previsão para  $x_t$  dadas as informações até o instante  $t-h$  e  $x_{t|t}$  a previsão para  $x_t$  dada as informações até o instante  $t$ . Além disso, as matrizes  $P$  e  $G$  conterão o MSE das previsões de  $\mu_t$  e  $\pi_t$ , possuindo o seguinte formato:

$$P_{t|t-h} = E[(\mu_t - \mu_{t|t-h})(\mu_t - \mu_{t|t-h})'] \quad (7)$$

$$G_{t|t-h} = E[(\pi_t - \pi_{t|t-h})(\pi_t - \pi_{t|t-h})'] \quad (8)$$

Dessa forma, a partir das equações 5, 6 e 7 e covariância dos erros (matriz  $\Sigma$  da equação 2), chegamos as equações de predição:

$$\pi_{t|t-h} = \mu_{t|t-h} + \beta X_{t-h} + \delta d_t \quad (9)$$

$$\mu_{t|t-h} = \mu_{t-h|t-h} \quad (10)$$

$$G_{t|t-h} = P_{t|t-h} + Q \quad (11)$$

$$P_{t|t-h} = P_{t-h|t-h} + R \quad (12)$$

### 3.2.5 Equações de atualização

O par de equações de atualização existentes é o seguinte:

$$\mu_{t|t} = \mu_{t|t-h} + P_{t|t-h} G_{t|t-h}^{-1} (y_t - y_{t|t-h}) \quad (13)$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-h} - P_{t|t-h} G_{t|t-h}^{-1} P_{t|t-h} \quad (14)$$

Somente termos associados a equação de estado são atualizados pois o estado não é observado, enquanto realizar atualizações nos termos associados a equação de medida não faz sentido pois  $\pi_{t|t}$  e  $G_{t|t}$  são conhecidos.

Para elucidar o funcionamento do método, inicia-se em  $t = 0$ . Como não observamos nenhum dado nesse instante, é necessário começarmos o processo iterativo escolhendo um par de valores para  $\mu_{1|0}$  e  $P_{1|0}$  (a escolha desses valores é explicado na subseção 3.3). A partir da equação 9, chegamos a  $\pi_{1|0}$  e  $G_{1|0}$ , obtendo a previsão para  $t = 1$ . Nesse instante, já observamos  $\pi_1$  e, a partir das equações 13 e 14, chegamos a  $\mu_{1|1}$  e  $P_{1|1}$ . Tendo esses valores gerados, retornamos a equação de predição e geramos as previsões para  $t = 2$ . A partir daí as iterações continuam até chegar ao último instante de tempo em que se tem uma sequência de previsões para  $\mu_{t|t}$ ,  $\mu_{t|t-h}$ ,  $\pi_{t|t}$  e  $\pi_{t|t-h}$ .

### 3.2.6 Equações de suavização

As equações de suavização fornecerão as melhores estimativas pro estado dado todas as observações da amostra. A obtenção da estimativa suavizada do estado será importante em 3.4.2. As equações para esse procedimento são as seguintes:

$$\mu_{t|T} = E[\mu_t | y_1, \dots, y_T], \quad 0 \leq t \leq T \quad (15)$$

$$\mu_{t|T} = \mu_{t|t} + P_{t|t} P_{t+1|t}^{-1} (\mu_{t+1|T} - \mu_{t+1|t}) \quad (16)$$

$$P_{t|T} = P_{t|t} + P_{t|t} P_{t+1|t}^{-1} (P_{t+1|T} - P_{t+1|t}) P_{t+1|t}^{-1} P_{t|t} \quad (17)$$

A construção de  $\{\mu_{t|T}\}$  e  $\{P_{t|T}\}$  é feita por recursão retroativa, começando pelo instante final  $t = T$ . Ou seja, os termos finais das equações filtro dão origem aos termos iniciais dos termos de suavização ( $\mu_{t|T}$  e  $P_{t|T}$ ).

## 3.3 Inicialização e escolha de parâmetros fixos

Para iniciar o processo iterativo do filtro é necessário escolher valores iniciais para determinados termos.

Para iniciar o filtro, precisamos de  $\mu_{1|0}$  e  $P_{1|0}$ . O valor inicial do primeiro é o intercepto estimado da regressão de 3.1.1 utilizando 3 anos iniciais dos dados (janeiro de 2004 a dezembro de 2006). O segundo foi escolhido de maneira arbitrária, assumindo o valor 0.001. O escalar R, vindo da equação 6, também assume o último valor citado. O escalar Q é fixo para todas as janelas e é a variância do termo de erro da regressão do modelo 3.1.1 realizada com os três anos iniciais da amostra.

O vetor e a matriz de coeficientes  $\beta$  e  $\delta$  são estimadas em todas as janelas por maximização da função de verossimilhança. O funcionamento da função é explicado na subseção 3.4.1.

## 3.4 Estimação dos parâmetros

Para realizar a aplicação do Filtro de Kalman, foi utilizado o pacote *MARSS* desenvolvido em R. Dessa forma, todo o processo de estimação dos parâmetros do modelo é o que está presente no pacote e será melhor descrito a seguir.

### 3.4.1 A função de verossimilhança

Para as descrições a seguir, utilizaremos as seguintes definições:

$$\epsilon_t = y_t - y_{t|t-h} = y_t - \mu_{t|t-h} - \beta X_{t-h} + \delta d_t \quad (18)$$

$$\Sigma_t = \text{Var}(\epsilon_t) = \text{Var}[(\mu_t - \mu_{t|t-h}) + v_t] = P_{t|t-h} + R \quad (19)$$

Os resultados produzidos para  $t = 1, 2, 3, \dots, n$  na equação 18 são chamados de **inovações**.

Com essas informações, é possível prosseguir para a função de verossimilhança. O vetor de parâmetros a ser estimado é o seguinte:  $\Theta = \{\beta, \delta, P, Q\}$ . Dessa forma, a função de verossimilhança possui o seguinte formato:

$$\log L(\Theta|\text{dados}) = -\frac{N}{2\log(2\pi)} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^t \log|\Sigma_t(\Theta)| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^t \epsilon_t(\Theta)' \Sigma_t(\Theta)^{-1} \epsilon_t(\Theta) \quad (20)$$

### 3.4.2 O algoritmo EM

Para realizar a estimação dos parâmetros é utilizado o algoritmo de **Expectativa-Maximização (EM)**, o qual é bastante utilizado em modelos com variáveis não observáveis. A estimação dos parâmetros ocorre de maneira iterativa, alternando entre uma etapa de expectativa e outra de maximização.

O algoritmo irá encontrar a máxima verossimilhança estimada dos parâmetros da seguinte forma: Inicia-se com um vetor de parâmetros iniciais  $\hat{\Theta}_1$  e, após isso, encontra-se um vetor atualizado  $\hat{\Theta}_2$  que maximiza o valor esperado da verossimilhança sob a distribuição do estado ( $\mu$ ) condicionado a  $\hat{\Theta}_1$ . Essa distribuição é obtida pela estimativas suavizadas do estado. A cada iteração, o seguinte problema é resolvido:

$$\hat{\Theta}_i = \arg \max_{\Theta} E_{\mu|\hat{\Theta}_{i-1}}[\log L(\Theta|\pi_{t|T}, \mu)] \quad (21)$$

Com o novo vetor  $\hat{\Theta}_2$  estimado, é computado a distribuição de  $\mu$  condicionado a  $\hat{\Theta}_2$ . Assim, essa nova distribuição e  $\hat{\Theta}_2$  substituem a distribuição e  $\hat{\Theta}_1$  na equação 21. Esse processo é repetido até que a log-verossimilhança pare de crescer.

## 4 Métricas de erro

Serão definidos três erros de previsão para o cálculo das métricas:

$$e_{h,m} = \pi_t - \hat{\pi}_{t|t-h} \quad (22)$$

$$\ddot{e}_{h,m} = \ddot{\pi}_t - \hat{\pi}_{t|t-h}, \quad \forall \ddot{\pi}_t > \bar{\pi}_t \quad (23)$$

$$\tilde{e}_{h,m} = \tilde{\pi}_t - \hat{\pi}_{t|t-h}, \quad \forall \tilde{\pi}_t < \bar{\pi}_t \quad (24)$$

Todos consideram o erro de previsão para o modelo  $m$  e horizonte de previsão  $h$ . O que os difere é a amostra considerada para o cálculo da métrica: O primeiro considera todas as observações e previsões da inflação fora da amostra, o segundo considera somente as observações da inflação e previsões fora da amostra que estão acima da média da inflação e o terceiro considera somente as observações da inflação e previsões fora da amostra que estão abaixo da média da inflação.

Para avaliar a performance das previsões, foram utilizadas três estatísticas: Raiz do erro quadrático médio (RMSE), erro absoluto médio (MAE) e  $R^2$  fora da amostra (R2 OOS). A dummy  $d$  associada a métrica de erro indicará qual erro de previsão será utilizado.

$$RMSE_{d,h,m} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{n=1}^N e_{h,m}^2}, & \text{se } d = 0 \\ \sqrt{\frac{1}{w} \sum_{w=1}^W \ddot{e}_{h,m}^2}, & \text{se } d = 1 \\ \sqrt{\frac{1}{j} \sum_{j=1}^J \tilde{e}_{h,m}^2}, & \text{se } d = 2 \end{cases} \quad (25)$$

$$MAE_{d,h,m} = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{n=1}^N |e_{h,m}|, & \text{se } d = 0 \\ \frac{1}{w} \sum_{w=1}^W |\ddot{e}_{h,m}|, & \text{se } d = 1 \\ \frac{1}{j} \sum_{j=1}^J |\tilde{e}_{h,m}|, & \text{se } d = 2 \end{cases} \quad (26)$$

$$R^2 OOS_{d,h,m} = \begin{cases} 1 - \left[ \frac{\sum_{n=1}^N e_{h,m}^2}{\sum_{n=1}^N e_{h,\bar{\pi}}^2} \right], & \text{se } d = 0. m \neq \bar{\pi} \\ 1 - \left[ \frac{\sum_{w=1}^W \ddot{e}_{h,m}^2}{\sum_{w=1}^W \ddot{e}_{h,\bar{\pi}}^2} \right], & \text{se } d = 1. m \neq \bar{\pi} \\ 1 - \left[ \frac{\sum_{j=1}^J \tilde{e}_{h,m}^2}{\sum_{j=1}^J \tilde{e}_{h,\bar{\pi}}^2} \right], & \text{se } d = 2. m \neq \bar{\pi} \end{cases} \quad (27)$$

O termo  $\bar{\pi}$  indica o método de previsão de média histórica. O termo  $N$  indica o número total de observações fora da amostra,  $W$  o número total de observações da inflação acima da média da própria inflação fora da amostra e  $J$  o número total de observações da inflação abaixo da média da própria inflação fora da amostra. Tanto o RMSE quanto o MAE indicam uma melhor acurácia preditiva quanto menor for o valor, enquanto o  $R^2 OOS$  indica uma previsão mais acurada quanto mais próximo de 1 for o valor.

## 5 Resultados

As previsões foram feitas para o período compreendido entre janeiro de 2014 e janeiro de 2023, totalizando 109 previsões. Para comparar a performance dos modelos, comparamos as métricas de erro intra modelos. O foco da análise dos resultados é sobre os modelos 3.1.1 e 3.1.2, sendo os modelos 3.1.3 e 3.1.4 benchmarks a serem superados.

Quando analisamos as figuras 1 e 2, é possível ver a baixa responsividade do intercepto frente a variabilidade da inflação para os três casos, até mesmo para períodos de maior volatilidade da série. Propomos a utilização do intercepto variante no tempo para contornar essas questões, já que tal estratégia, em tese, irá permitir uma melhor captura da alta variabilidade presente na série de inflação.

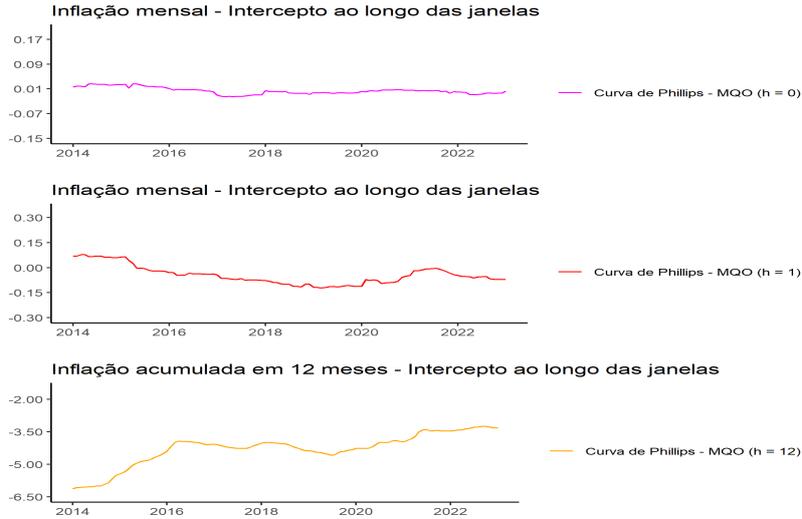


Figura 2: Intercepto para as curvas de Phillips estimadas por MQO

Na tabela 3, podemos ver as métricas de erro para todos os modelos e horizontes de previsão. Quando analisamos o caso de  $h = 0$ , vemos que a curva de Phillips estimada com intercepto fixo no tempo performa um pouco melhor do que quando estimamos a mesma curva com intercepto variante no tempo e ambos os modelos superam por grande margem os benchmarks. Para  $h = 1$ , é mais vantajosa a utilização do intercepto variante no tempo, especialmente devido ao cenário de  $d = 1$ , indicando que em momentos de alta inflacionária o modelo proposto é relativamente mais preciso. Vemos também que a previsão da inflação acumulada 12 meses à frente também foi bastante aprimorada com o modelo proposto, já que a curva de Phillips estimada por MQO, considerando toda a previsão fora da amostra, não conseguiu superar a previsão por média histórica enquanto o modelo proposto a superou por uma margem considerável. O modelo se saiu ainda melhor quando consideramos somente as observações fora da amostra que ficaram abaixo da média da inflação. .

Tabela 3: RMSE,  $R^2OOS$  e MAE para previsões out of sample

RMSE/ $(R^2OOS)$ / $\{MAE\}$	$\pi_t$ : h = 0			$\pi_t$ : h = 1			$\pi_t^{12}$ : h = 12		
	d = 0	d = 1	d = 2	d = 0	d = 1	d = 2	d = 0	d = 1	d = 2
<b>Curva de Phillips - MQO</b>	0.115 (0.923) {0.089}	0.1368 (0.914) {0.103}	0.093 (0.935) {0.078}	0.295 (0.503) {0.221}	0.355 (0.427) {0.280}	0.232 (0.606) {0.172}	3.084 (-0.085) {2.269}	3.803 (-0.452) {2.963}	2.235 (0.349) {1.636}
<b>Curva de Phillips - FK</b>	0.124 (0.911) {0.100}	0.143 (0.905) {0.113}	0.104 (0.919) {0.088}	0.288 (0.525) {0.218}	0.316 (0.546) {0.250}	0.262 (0.497) {0.191}	2.604 (0.226) {1.961}	3.271 (-0.074) {2.586}	1.791 (0.582) {1.391}
<b>ARIMA</b>	0.346 (0.314) {0.268}	0.350 (0.442) {0.287}	0.342 (0.140) {0.252}	0.410 (0.004) {0.320}	0.415 (0.221) {0.333}	0.405 (0.309) {0.309}	3.39 (-0.315) {2.666}	3.770 (-0.427) {3.039}	3.018 (-0.185) {2.326}
<b>Média histórica</b>	0.418 - {0.327}	0.468 - {0.383}	0.370 - {0.280}	0.419 - {0.328}	0.470 - {0.384}	0.371 - {0.280}	2.96 - {2.557}	3.156 - {2.624}	2.771 - {2.495}

As colunas representam a combinação de horizontes e erros de previsão utilizados. Os valores coloridos correspondem ao melhor resultado dos modelos para cada métrica de erro.

Ao analisar a figura 3, para os casos de  $h = 0$  e  $h = 1$ , podemos ver como a introdução do intercepto variante no tempo foi mais eficaz para captar a variabilidade existente na série de inflação mensal. Na utilização do intercepto variante no tempo para a previsão da inflação acumulada 12 meses à frente, vemos que a utilização do parâmetro variante no tempo serviu como um suavizador do intercepto, o tornando menos propenso a quebras estruturais.

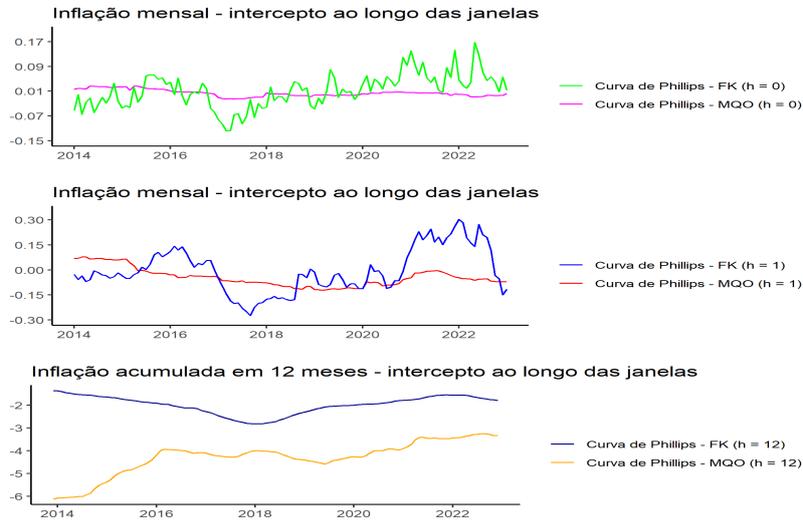


Figura 3: Intercepto das curvas de Phillips para todos os horizontes de previsão.

A figura 4 apresenta como o comportamento dos interceptos se reflete na previsão: Quando variante no tempo, para  $h = 1$ , há uma maior captação da dinâmica inflacionária, especialmente para as observações da inflação que estão acima da média. No cenário de  $h = 0$ , a acurácia preditiva aumenta quando comparado ao caso de  $h = 1$  por utilizarmos todo o conjunto informacional disponível a respeito das covariadas no momento que a previsão é realizada. Dessa forma, resta ao intercepto pouca estrutura a ser capturada, levando os dois métodos a possuírem acurácia muito próximas. Para a previsão da inflação acumulada em 12 meses, vemos que o filtro realizou uma suavização do intercepto quando comparado ao caso de MQO, mitigando o efeito da volatilidade da série sobre esse parâmetro. Também podemos observar que para o período compreendido entre 2018 e início de 2020 o modelo apresentou boa capacidade preditiva, num período de maior estabilidade da série.

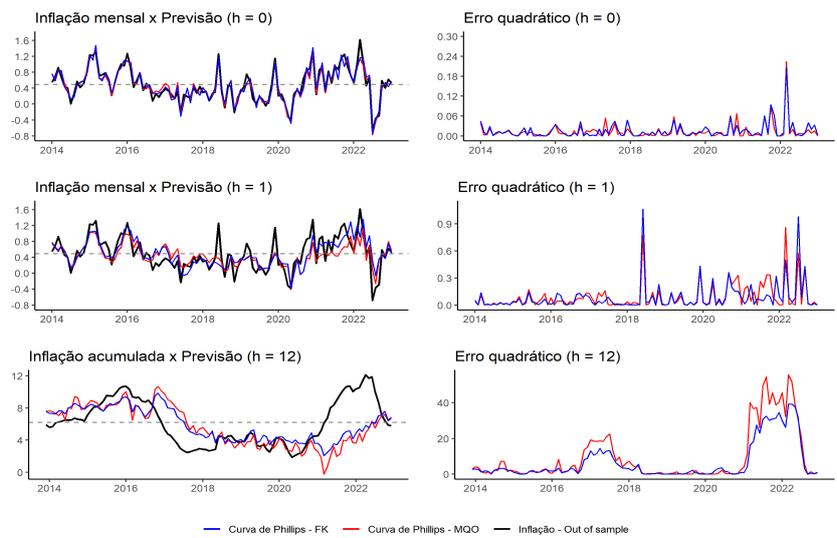


Figura 4: Previsão e erro quadrático para todos os horizontes de previsão.

## 6 Conclusão

Comparamos a previsão gerada para a inflação mensal em tempo real ( $h = 0$ ) e um passo à frente ( $h = 1$ ) e para a inflação acumulada em 12 meses para 12 meses à frente ( $h = 12$ ) por uma curva de Phillips híbrida com intercepto fixo e variante no tempo com o modelo  $ARIMA(p, d, q)$  e média histórica, em que os dois últimos são modelos benchmarks.

Encontramos que a adição de uma dinâmica temporal ao intercepto auxiliou esse parâmetro capturar melhor a dinâmica inflacionária para prever a inflação mensal, enquanto para a inflação acumulada essa dinâmica o tornou mais suavizado, sendo menos propenso a quebras estruturais.

A respeito da performance das previsões, o principais resultados foram:

1. Para a previsão em tempo real da inflação mensal, não houve ganho na utilização do intercepto variante no tempo. O modelo com intercepto fixo foi significativamente superior aos benchmarks em todas as métricas de erro e amostras de previsão utilizadas e ligeiramente superior ao modelo proposto.
2. O modelo com intercepto variante no tempo foi superior aos benchmarks sob todas as amostras e métricas de erro e foi superior ao modelo com intercepto fixo no tempo para todas as métricas de erro sob  $d = 0$  e  $d = 1$ .
3. Para a previsão da inflação acumulada em 12 meses, prevendo 12 meses à frente, o modelo proposto performou substancialmente melhor que os outros três sob  $d = 0$  e  $d = 2$ . Esse caso foi onde houve maior ganho relativo com a utilização da metodologia proposta nesse trabalho.

Dessa forma, vimos que a metodologia proposta apresenta ganhos significativos quando utilizada para realizar previsões sob horizontes onde há um menor conjunto informacional a ser utilizado nos regressores.

## 7 Referências

MEDEIROS, Marcelo; VASCONCELOS, Gabriel; VEIGA, Álvaro; ZILBERMAN, Eduardo. Forecasting Inflation in a Data-Rich Environment: The Benefits of Machine Learning Methods. **Journal of Business & Economic Statistics** , 39:1, 98-119, 2021. DOI: 10.1080/07350015.2019.1637745.

BOARETTO, Gilberto; SILVA, Cleomar. Services inflation dynamics and persistence puzzle in Brazil: a time-varying parameter approach. **Applied Economics** , 51:13, 1450-1462, 2018. DOI: 10.1080/00036846.2018.1527456

GARCIA, Márcio; MEDEIROS, Marcelo; VASCONCELOS, Gabriel. Real-time inflation forecasting with high-dimensional models: The case of Brazil. **Journal of Development Economics**, 679-693, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2017.02.002> .

ARAUJO, Gustavo; GAGLIANONE, Wagner. Machine learning methods for inflation forecasting in contenders versus classical models. **Latin American Journal of Central Banking**, Volume 4, Issue 2, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.latcb.2023.100087>.

MEDEIROS, Marcelo; VASCONCELOS, Gabriel; FREITAS, Eduardo. Forecasting Brazilian Inflation with High Dimensional Models. **Brazilian Review of Econometrics**, Volume 36, No.2, 2016. DOI: <https://doi.org/10.12660/bre.v99n992016.52273>

STOCK, J.H; WATSON, M.W. Why has U.S Inflation Become Harder to Forecast? **Journal of Money, Credit and Banking**, 39; 3-33, 2007. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1538-4616.2007.00014.x>